Cálculo Diferencial e Integral 2

COLEGIO DE BACHILLERES
DEL ESTADO DE SONORA

Director General
Mtro. Julio Alfonso Martínez Romero

Director Académico
Ing. Arturo Sandoval Mariscal

Director de Administración y Finanzas
C.P. Jesús Urbano Limón Tapia

Director de Planeación
Ing. Raúl Leonel Durazo Amaya

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 2
Módulo de Aprendizaje.

Primera edición 2011. Impreso en México.

DIRECCIÓN ACADÉMICA
Departamento de Desarrollo Curricular
Blvd. Agustín de Vildósola, Sector Sur
Hermosillo, Sonora. México. C.P. 83280

COMISIÓN ELABORADORA:

Elaborador:
Alma Lorenia Valenzuela Chávez

Revisión Disciplinaria:
Margarita León Vega

Corrección de Estilo:
Flora Inés Cabrera Fregoso

Supervisión Académica:
Mtra. Luz María Grijalva Díaz

Diseño:
María Jesús Jiménez Duarte

Edición:
Bernardino Huerta Valdez

Coordinación Técnica:
Claudia Yolanda Lugo Peñúñuri
Diana Irene Valenzuela López

Coordinación General:
Ing. Arturo Sandoval Mariscal

Esta publicación se terminó de imprimir durante el mes de diciembre de 2011.
Diseñada en Dirección Académica del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora
Blvd. Agustín de Vildósola; Sector Sur. Hermosillo, Sonora, México
La edición consta de 3,733 ejemplares.

DATOS DEL ALUMNO

Nombre: ____

Plantel: ____

Grupo: ____________ Turno: __________ Teléfono: ______________

E-mail: ____

Domicilio: ____

____

Ubicación Curricular

COMPONENTE: **FORMACIÓN PROPEDÉUTICA**	**HORAS SEMANALES:** **03**
GRUPO 1 Y 2: **FÍSICO MATEMÁTICO**	**CRÉDITOS:** **06**

Índice

Presentación

"Una competencia es la integración de habilidades, conocimientos y actitudes en un contexto específico".

El enfoque en competencias considera que los conocimientos por sí mismos no son lo más importante, sino el uso que se hace de ellos en situaciones específicas de la vida personal, social y profesional. De este modo, las competencias requieren una base sólida de conocimientos y ciertas habilidades, los cuales se integran para un mismo propósito en un determinado contexto.

El presente Módulo de Aprendizaje de la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral 2, es una herramienta de suma importancia, que propiciará tu desarrollo como persona visionaria, competente e innovadora, características que se establecen en los objetivos de la Reforma Integral de Educación Media Superior que actualmente se está implementando a nivel nacional.

El Módulo de aprendizaje es uno de los apoyos didácticos que el Colegio de Bachilleres te ofrece con la intención de estar acorde a los nuevos tiempos, a las nuevas políticas educativas, además de lo que demandan los escenarios local, nacional e internacional; el módulo se encuentra organizado a través de bloques de aprendizaje y secuencias didácticas. Una secuencia didáctica es un conjunto de actividades, organizadas en tres momentos: Inicio, desarrollo y cierre. En el inicio desarrollarás actividades que te permitirán identificar y recuperar las experiencias, los saberes, las preconcepciones y los conocimientos que ya has adquirido a través de tu formación, mismos que te ayudarán a abordar con facilidad el tema que se presenta en el desarrollo, donde realizarás actividades que introducen nuevos conocimientos dándote la oportunidad de contextualizarlos en situaciones de la vida cotidiana, con la finalidad de que tu aprendizaje sea significativo.

Posteriormente se encuentra el momento de cierre de la secuencia didáctica, donde integrarás todos los saberes que realizaste en las actividades de inicio y desarrollo.

En todas las actividades de los tres momentos se consideran los saberes conceptuales, procedimentales y actitudinales. De acuerdo a las características y del propósito de las actividades, éstas se desarrollan de forma individual, binas o equipos.

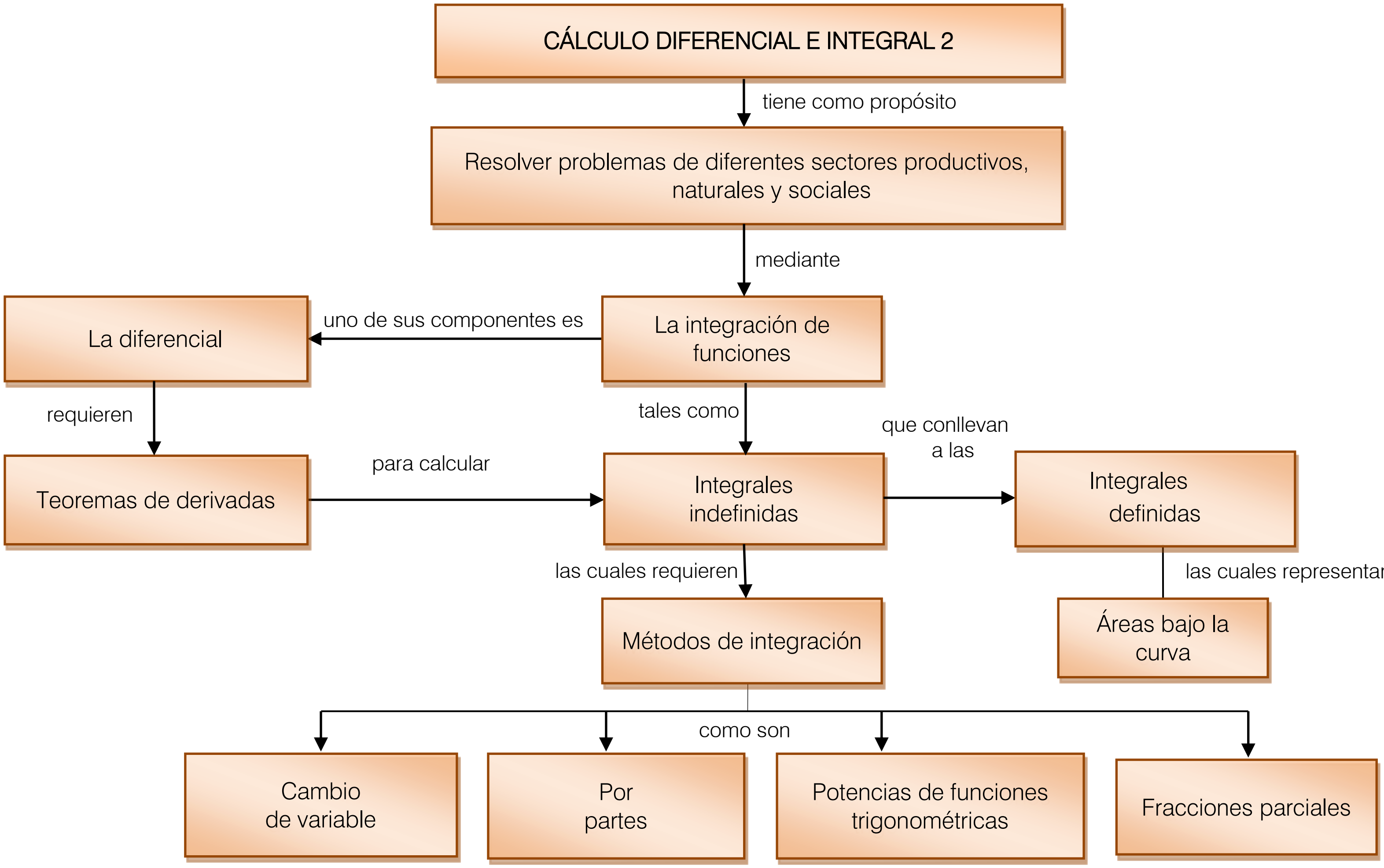
Para el desarrollo del trabajo deberás utilizar diversos recursos, desde material bibliográfico, videos, investigación de campo, etc.

La retroalimentación de tus conocimientos es de suma importancia, de ahí que se te invita a participar de forma activa, de esta forma aclararás dudas o bien fortalecerás lo aprendido; además en este momento, el docente podrá tener una visión general del logro de los aprendizajes del grupo.

Recuerda que la evaluación en el enfoque en competencias es un proceso continuo, que permite recabar evidencias a través de tu trabajo, donde se tomarán en cuenta los tres saberes: el conceptual, procedimental y actitudinal con el propósito de que apoyado por tu maestro mejores el aprendizaje. Es necesario que realices la autoevaluación, este ejercicio permite que valores tu actuación y reconozcas tus posibilidades, limitaciones y cambios necesarios para mejorar tu aprendizaje.

Así también, es recomendable la coevaluación, proceso donde de manera conjunta valoran su actuación, con la finalidad de fomentar la participación, reflexión y crítica ante situaciones de sus aprendizajes, promoviendo las actitudes de responsabilidad e integración del grupo.

Nuestra sociedad necesita individuos a nivel medio superior con conocimientos, habilidades, actitudes y valores, que les permitan integrarse y desarrollarse de manera satisfactoria en el mundo social, profesional y laboral. Para que contribuyas en ello, es indispensable que asumas una nueva visión y actitud en cuanto a tu rol, es decir, de ser receptor de contenidos, ahora construirás tu propio conocimiento a través de la problematización y contextualización de los mismos, situación que te permitirá: Aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a ser y aprender a vivir juntos.


CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 2
tiene como propósito
Resolver problemas de diferentes sectores productivos, naturales y sociales
mediante
La integración de funciones
uno de sus componentes es
La diferencial
requieren
Teoremas de derivadas
para calcular
tales como
Integrales indefinidas
que conllevan a las
Integrales definidas
las cuales representan
Áreas bajo la curva
las cuales requieren
Métodos de integración
como son
Cambio de variable
Por partes
Potencias de funciones trigonométricas
Fracciones parciales

BLOQUE 1

Utiliza diferenciales e integral indefinida.

Competencias disciplinares:

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Unidad de competencia:

- Aplica los conceptos de diferencial, para resolver problemas prácticos, tras conocer las reglas de diferenciación; mostrando una actitud analítica y participativa.
- Utiliza el concepto de integral indefinida para obtener las antiderivadas de funciones.

Atributos a desarrollar en el bloque:

4.1. Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
5.4. Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
5.6. Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
6.1. Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.
7.1. Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.
8.1. Propone maneras de solucionar un problema y desarrolla un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
8.2. Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
8.3. Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Tiempo asignado: 16 horas

Secuencia didáctica 1.
La diferencial.

Inicio

Actividad: 1

Deriva las siguientes funciones mediante el uso de teoremas:

1. $M(x)=\sqrt{x^8}$

2. $P(x)=x^5-x^3-4x^2+6x-\pi$

3. $L(x)=\dfrac{1}{x^5}+5$

4. $f(x)=(3x^2+5)(x^4+1)$

5. $g(x)=\dfrac{x^3+2}{x^2+1}$

Actividad: 1 (continuación)

6. $H(x) = -2(x+5)^3 - 9$

7. $h(x) = \text{sen}\,(3x+1)$

8. $f(x) = \sec x^4$

9. $L(x) = \cos^3 (x^2 + 1)$

10. $y = e^{x^2 + 5x + 1}$

Evaluación						
Actividad: 1	Producto: Ejercicios.			Puntaje:		
Saberes						
Conceptual	Procedimental			Actitudinal		
Identifica la derivada de una función.	Calcula la derivada de una función.			Es respetuoso con sus compañeros.		
Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente		

Desarrollo

Actividad: 2

En equipo realicen lo que se les solicita.

1. Dibujen en la siguiente cuadrícula un cuadrado y calculen su perímetro y área.

2. Si la longitud de sus lados se incrementa media unidad, ¿cuánto se incrementará su perímetro?

3. Si la longitud de sus lados se incrementa un cuarto de unidad, ¿cuánto se incrementará su área?

4. Comprueben algebraicamente las respuestas anteriores.

5. ¿Fueron acertadas tus respuestas?, ¿por qué?

Actividad: 2 (continuación)

6. ¿De qué forma se incrementan el perímetro y el área del cuadrado, cuando se incrementan sus lados?

7. Expresa el perímetro del cuadrado como función de uno de sus lados.

8. Expresa el área del cuadrado como función de uno de sus lados.

9. ¿De qué manera puedes relacionar las dos funciones con los cálculos que realizaron para la comprobación?

10. Si la longitud de sus lados se incrementa en 0.05 unidades, ¿cuánto se incrementará su área y su perímetro?

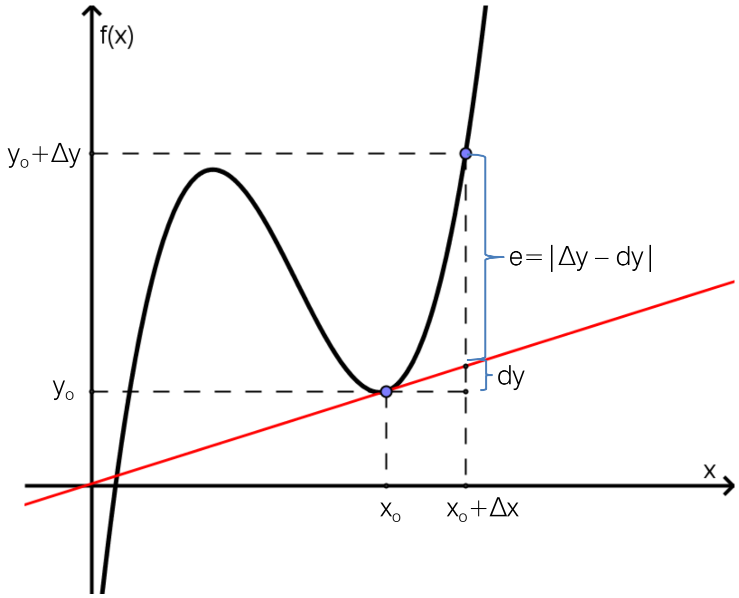
<table>
<tr><td colspan="6">Evaluación</td></tr>
<tr><td>Actividad: 2</td><td colspan="3">Producto: Cuestionario.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><td colspan="6">Saberes</td></tr>
<tr><td>Conceptual</td><td colspan="3">Procedimental</td><td colspan="2">Actitudinal</td></tr>
<tr><td>Distingue la dependencia entre los incrementos de las variables.</td><td colspan="3">Argumenta el incremento de la variable dependiente con respecto al incremento de la variable dependiente.</td><td colspan="2">Es respetuoso, aporta ideas y tiene apertura con las aportaciones de sus compañeros.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

La diferencial de una función.

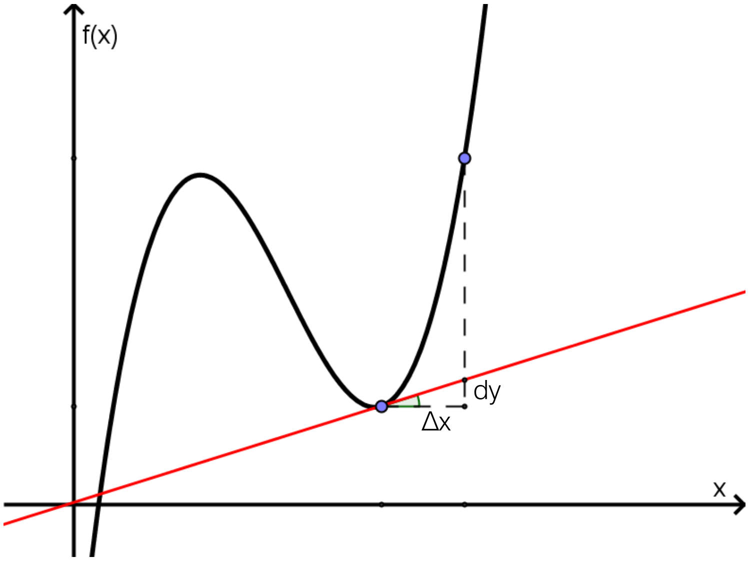
En la actividad anterior realizaste cálculos para obtener el incremento tanto del área como del perímetro de un cuadrado, ahora se te presentará una forma más sencilla de obtenerlo utilizando la derivada de una función, para ello se abordará el tema de "la diferencial de una función" y posteriormente se te proporcionarán algunos ejemplos de su utilidad.

La diferencial de una función (dy) en un punto (x_o, y_o) es el incremento de la ordenada medido sobre la tangente a la curva representativa en ese punto

Si f(x) es una función que representa una medida física, su diferencial es una estimación del error absoluto de dicha medida. El error absoluto es la diferencia entre el valor aproximado y el valor exacto.
La diferencia entre la diferencial de la función dy, y el incremento de la función Δy, se le conoce como el error, el cual se visualiza en la siguiente gráfica:



Al observar la gráfica de la recta tangente trazada en el punto x_o, se tiene que el ángulo de inclinación es la razón que existe entre "dy" y "Δx". El ángulo de inclinación de una recta equivale a la pendiente de la recta tangente en el punto mencionado, este tema lo estudiaste en Matemáticas 3 y se expresa como sigue:



$$m_{tan}=\frac{dy}{\Delta x} \qquad ó \qquad f'(x)=\frac{dy}{\Delta x}$$

Ahora bien si se denota a Δx como dx, se obtiene:

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}$$

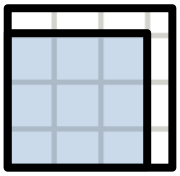
Despejando "dy" se logra la forma de obtener la diferencial de la función.

$$dy=f'(x)dx$$

Anteriormente se mencionó que para resolver problemas de incrementos, como el mencionado en la actividad 2, era más sencillo de resolverlo con la diferencial, es por ello que se retomará ese problema y se resolverá utilizando la diferencial.

Ejemplo 1.
Tomando en cuenta que se trazó un cuadrado cuyo lado mide 3 unidades.

a) Si la longitud de sus lados se incrementa media unidad, ¿cuánto se incrementará su perímetro?



Cuando se posee la cuadrícula es sencillo contar de forma directa el incremento del perímetro cuando son unidades enteras, pero cuando no lo son, se puede recurrir a la diferencial, como se muestra a continuación.

Se denominará a:

L : como la longitud del lado del cuadrado.
P : es el perímetro del cuadrado.

Considerando que se solicita el incremento del perímetro, se expresa la función correspondiente:

$$P = 4L$$

Tomando la fórmula de la diferencial $dy = f'(x)dx$, ajustándola a la notación de este problema, se expresa:

$$dP = P'(L)dL$$

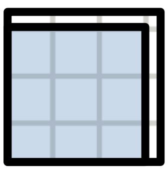
Donde:
dP significa el incremento del perímetro.
$P'(L)$ es la derivada de la función perímetro.
dL es el incremento de la longitud de su lado.

Por lo tanto al tomar en consideración que la longitud del lado se incrementó en una unidad y la derivada del perímetro, se obtiene:

$$\begin{aligned} dP &= P'(L)dL \\ dP &= 4dL \\ dP &= 4(0.5) \\ dP &= 2 \end{aligned}$$

El perímetro se incrementó 2 unidades.

b) Si la longitud de sus lados se incrementa un cuarto de unidad, ¿cuánto se incrementará su área?



Se denominará a:

L : como la longitud del lado del cuadrado.
A : es el área del cuadrado.

El área del cuadrado se expresa como:

$$A = L^2$$

La diferencial del área queda de la siguiente forma:

$$dA = A'(L)dL$$

Donde:
dA significa el incremento del área.
$A'(L)$ es la derivada de la función área.
dL es el incremento de la longitud de su lado.

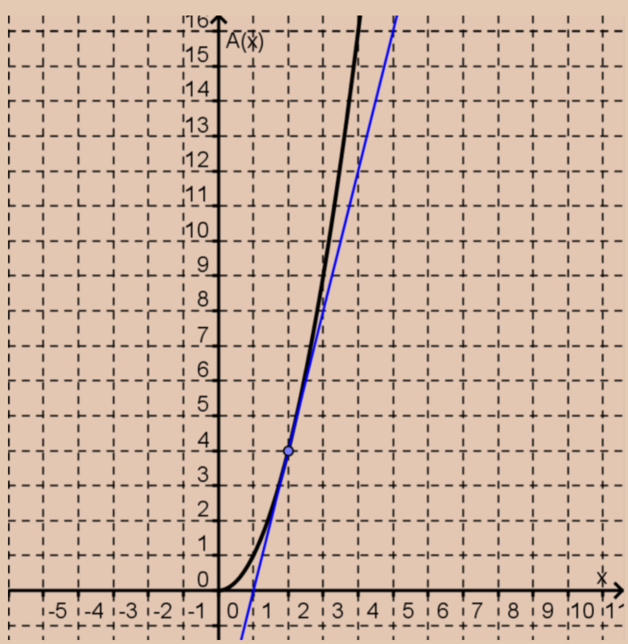
Al tomar en consideración que la longitud del lado se incrementó en dos unidades y la derivada del área, se obtiene:

$$dA = A'(L)dL$$
$$dA = 2LdL$$
$$dA = 2(3)(0.25)$$
$$dA = 1.5$$

El área se incrementó 1.5 unidades cuadradas.

Actividad: 3

Analiza la siguiente gráfica, la cual representa el área de un cuadrado cuya longitud de lado mide "x" cm y contesta los cuestionamientos posteriores.



a) Si la longitud del lado es 2 cm, ¿cuánto mide el área del cuadrado?

Actividad: 3 (continuación)

b) Completa la siguiente tabla tomando como base el cuadrado de longitud de 2 cm de lado, para calcular los incrementos.

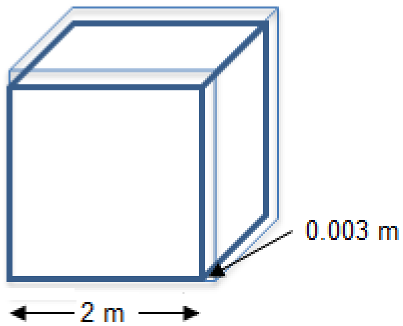
Longitud del lado x	Área A(x)	Incremento de longitud Δx	Incremento de área ΔA	Diferencial del Área dA	Error |ΔA – dA|
2					
2.5					
3					
4					

¿A qué conclusión llegas observando el comportamiento del error?

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 3</td><td colspan="4">Producto: Complementación de la tabla y conclusión.</td><td>Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="4">Procedimental</th><th>Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Identifica los incrementos de las variables dependiente e independiente, además de la diferencial de la función.</td><td colspan="4">Infiere acerca de la aproximación del incremento de la variable dependiente a través de la diferencial.</td><td>Es participativo, respetuoso y tiene apertura con las aportaciones de sus compañeros.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Ejemplo 2.
Obtener el valor aproximado del incremento en el volumen de un cubo, cuyos lados miden (o tienen una longitud de) 2 m, considerando un aumento de 0.003 por lado.

Se hace un bosquejo del problema para entender qué se está pidiendo.



El volumen original del cubo es:

$$V = (\text{Lado})(\text{Lado})(\text{Lado})$$
$$V = L^3$$

Entonces el diferencial del volumen es:

$$dV = 3L^2 dL$$

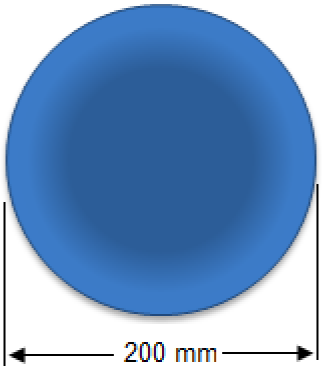
Entonces, dV representa el incremento de volumen y dL representa el aumento del lado, así que sustituyendo los valores se obtiene:

$$dV = 3L^2 dL$$
$$dV = 3(2m)^2(0.003m)$$
$$dV = 0.036\, m^3$$

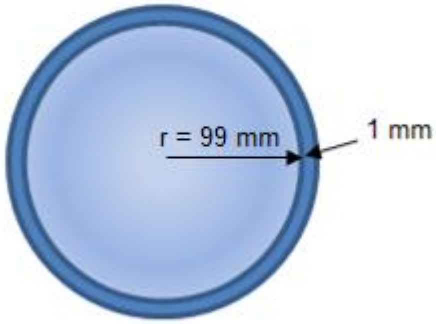
Esto significa que el cubo aumentó 0.036 m^3.

Ejemplo 3.
Hallar el valor aproximado del volumen de una cáscara esférica de 200 mm de diámetro exterior y 1 mm de espesor.

Primero se tiene que bosquejar el dibujo que representa el problema, para entenderlo mejor.
Se muestra la esfera:



Se hace un corte para visualizar el espesor.



El volumen de la cáscara es la parte sólida de la esfera, la cual se visualiza como un incremento del volumen que ocupa la esfera en su interior, por lo tanto, es lo mismo que obtener el incremento de volumen de una esfera de radio inicial 99 mm con un aumento de 1 mm de radio.

La fórmula del volumen de una esfera es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$dV = \frac{4}{3}\pi\left(3r^2\right)dr$$

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

Sustituyendo los datos se obtiene:

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

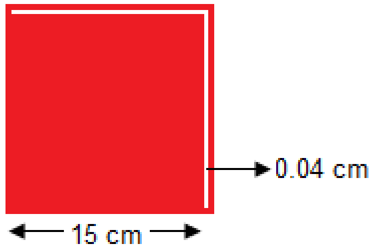
$$dV = 4\pi(99\,\text{mm})^2(1\text{mm})$$

$$dV = 39{,}204\pi \ \text{mm}^3$$

El volumen de la cáscara es aproximadamente de 123,163 mm^3

Ejemplo 4.

Al calentar una placa cuadrada metálica de 15 cm. de longitud, su lado aumenta 0.04 cm. ¿Cuánto aumentó aproximadamente su área?



Encontrar el aumento de área es lo mismo que encontrar el dA.

La fórmula del área de un cuadrado es:

$$A = L^2$$

Donde L es la longitud uno de los lados del cuadrado.

$$dA = 2L\,dL$$

Sustituyendo los datos se tiene:

$$dA = 2(15\text{cm})(0.04\,\text{cm})$$

$$dA = 1.2\,\text{cm}^2$$

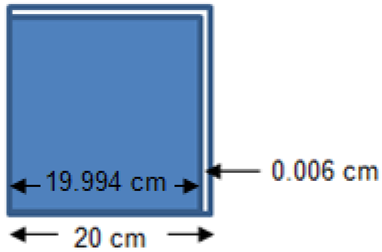
Por lo tanto, el área presenta un aumento de 1.2 cm^2

Ejemplo 5.

Al enfriar una placa cuadrada metálica de 20 cm. de longitud, su lado disminuye un 0.03%. ¿Cuánto disminuirá porcentualmente su área?

Utilizando diferencial de área para resolver el problema se tiene:

El 0.03% que disminuye equivale a 0.006 cm, para verificar esto se multiplica 20 cm por 0.0003.



Para calcular cuánto disminuyó porcentualmente el área, se tiene que dividir el diferencial del área entre el área inicial y multiplicarlo por cien.

$$A = L^2$$
$$dA = 2L\,dL$$
$$dA = 2(19.994\text{ cm})(0.006\text{ cm})$$
$$dA = 0.239928\text{ cm}^2$$

Por lo tanto su disminución porcentual se obtiene de la siguiente forma:

$$\frac{dA}{A} = \frac{0.239928\text{ cm}^2}{(20\text{ cm})^2} = \frac{0.239928\text{ cm}^2}{400\text{ cm}^2} = 0.0006 \Rightarrow 0.06\%$$

Si el lado de la lámina disminuye el 0.03%, su área disminuye el 0.06%

Actividad: 4

Resuelve los siguientes problemas utilizando la diferencial.

1. La pared lateral de un depósito cilíndrico de radio 50 cm y altura 1 m, debe revestirse con una capa de concreto de 3 cm de espesor. ¿Cuál es aproximadamente la cantidad de concreto que se requiere?

Actividad: 4 (continuación)

2. Calcula el incremento del área de un cuadrado cuyos lados tienen una longitud de 7 m, considerando que éstos aumentaron 3 mm.

3. Calcula el incremento aproximado del volumen de un cubo cuyos lados miden 7.3 m, considerando un aumento de 0.007 m por lado.

4. Si la medida de la arista de un cubo es 12 pulgadas, con un posible error de 0.03 pulgadas, estimar mediante diferenciales el máximo error posible cometido al calcular:
   a) El volumen del cubo.

Actividad: 4 (continuación)

b) El área del cubo.

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 4</td><td colspan="3">Producto: Problemas aplicados.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Convierte un problema de la forma cotidiana a su expresión como función, para resolverlo mediante la diferencial.</td><td colspan="3">Aplica la diferencial para resolver problemas cotidianos.</td><td colspan="2">Aprecia la facilidad de resolver problemas mediante la diferencial de una función.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Teoremas sobre Diferenciales.

Considerando que la diferencial de una función es el producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente, se acepta que a cada fórmula de derivación (vistas en la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral I), le corresponde una diferenciación que se detallará a continuación.

Fórmulas diferenciales generales

Para $f(x)$ y $g(x)$, funciones derivables de x:

1. Constante: $d[c]=0$

2. Múltiplo constante: $d[cg(x)]=c\,g'(x)dx$

3. Potencia: $d[x^n]=n\,x^{n-1}dx$

4. Suma o diferencia:
$$\begin{aligned} d[f(x)\pm g(x)] &= d(f(x))\pm d(g(x)) \\ &= f'(x)dx \pm g'(x)dx \end{aligned}$$

5. Producto: $d[f(x)\cdot g(x)] = f(x)\cdot d[g(x)] + g(x)\cdot d[f(x)]$
$= f(x)\cdot g'(x)dx + g(x)\cdot f'(x)dx$

6. Cociente: $d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\cdot d[f(x)] - f(x)\cdot d[g(x)]}{[g(x)]^2}$
$= \frac{g(x)\cdot f'(x)dx - f(x)\cdot g'(x)dx}{[g(x)]^2}$

7. Regla de la cadena: $d[(f\circ g)(x)] = d[(f(g(x))] = f'(g(x))\cdot g'(x)dx$

Fórmulas diferenciales de funciones trascendentales.

I. Funciones trigonométricas

1. $d[\text{Sen}(g(x))] = g'(x)\cdot \text{Cos}(g(x))\ dx$

2. $d[\text{Cos}(g(x))] = -g'(x)\cdot \text{Sen}(g(x))\ dx$

3. $d[\text{Tan}\,(g(x))] = g'(x)\cdot \text{Sec}^2(g(x))\ dx$

4. $d[\text{Cot}(g(x))] = -g'(x)\cdot \text{Csc}^2(g(x))\ dx$

5. $d[\text{Sec}(g(x))] = g'(x)\cdot \text{Sec}(g(x))\cdot \text{Tan}(g(x))\ dx$

6. $d[\text{Csc}(g(x))] = -g'(x)\cdot \text{Csc}(g(x))\cdot \text{Cot}(g(x))\ dx$

II. Función exponencial natural

1. $d\left[e^{g(x)}\right] = g'(x)\cdot e^{g(x)}dx$

III. Función logaritmo natural

1. $d[\text{Ln}(g(x)] = \frac{g'(x)}{g(x)}\cdot dx \quad \text{con} \quad g(x)\neq 0$

A continuación se presentan varios ejemplos donde se calcula la diferencial de funciones, utilizando las fórmulas de diferenciación.

Ejemplos:

1. $y = 6x^2 - 2$

   $\boxed{dy = 12x\,dx}$

2. $y = 7x^{\frac{1}{2}}$

$dy = \frac{7}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$

$dy = \frac{7}{2x^{\frac{1}{2}}}dx$

$dy = \frac{7}{2\sqrt{x}}dx$

$\boxed{dy = \frac{7}{2\sqrt{x}}dx}$

3. $y = \frac{x+1}{x-1}$

$dy = \frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}dx$

$dy = \frac{(1)(x-1)-(x+1)(1)}{(x-1)^2}dx$

$dy = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}dx$

$dy = \frac{-2}{(x-1)^2}dx$

$\boxed{dy = \frac{-2}{(x-1)^2}dx}$

4. $y = 4x^3 - 6x^2 + 8$

$\boxed{dy = \left(12x^2 - 12x\right)dx}$

5. $y = \sqrt{(x^2 - 2x + 1)^3}$

Este problema se puede resolver de dos formas:

a) $y = \sqrt{(x^2 - 2x + 1)^3}$ Se puede expresar como: $y = (x^2 - 2x + 1)^{\frac{3}{2}}$

$dy = \frac{3}{2}(x^2 - 2x + 1)^{\frac{3}{2}-1}(x^2 - 2x + 1)'dx$

$dy = \frac{3}{2}(x^2 - 2x + 1)^{\frac{1}{2}}(2x - 2)dx$

$dy = \frac{3(2x-2)}{2}(x^2 - 2x + 1)^{\frac{1}{2}}dx$

$dy = \frac{6x-6}{2}(x^2 - 2x + 1)^{\frac{1}{2}}dx$

$dy = (3x-3)(x^2 - 2x + 1)^{\frac{1}{2}}dx$

$dy = (3x-3)\sqrt{x^2 - 2x + 1}\ dx$

b) Si identificas que el polinomio que está dentro del radical es un trinomio cuadrado perfecto, por lo que la función se puede expresar como:

$y=\sqrt{((x-1)^2)^3}=(x-1)^3$ y se resuelve:

$$y=(x-1)^3$$
$$dy=3(x-1)^2(1)dx$$
$$dy=3(x^2-2x+1)dx$$
$$dy=\left(3x^2-6x+3\right)dx$$

Los dos procedimientos dan el mismo resultado, sólo se tiene que seguir simplificando en el primer procedimiento:

$$dy=(3x-3)\sqrt{x^2-2x+1}\ dx$$
$$dy=(3x-3)\sqrt{(x-1)^2}\ dx$$
$$dy=(3x-3)(x-1)\ dx$$
$$dy=\left(3x^2-3x-3x+3\right)dx$$
$$dy=\left(3x^2-6x+3\right)dx$$

Así que el resultado es:

$$\boxed{dy=\left(3x^2-6x+3\right)dx}$$

6. $y=(-2x^2+1)(5x-2)$

$$dy=\left[(-2x^2+1)'(5x-2)+(-2x^2+1)(5x-2)'\right]dx$$
$$dy=\left[(-4x)(5x-2)+(-2x^2+1)(5)\right]dx$$
$$dy=\left[-20x^2+8x-10x^2+5\right]dx$$
$$\boxed{dy=\left(-30x^2+8x+5\right)dx}$$

7. $y=(2x+3)^2$

$$dy=2(2x+3)^{2-1}(2x+3)'dx$$
$$dy=2(2x+3)(2)dx$$
$$\boxed{dy=(8x+12)dx}$$

8. $y=\sqrt{2x+1}$ Se puede expresar como: $y=(2x+1)^{\frac{1}{2}}$

$$dy=\frac{1}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}-1}(2x+1)'\ dx$$
$$dy=\frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}}(2)dx$$
$$dy=\frac{2}{2(2x+1)^{\frac{1}{2}}}dx$$
$$dy=\frac{1}{(2x+1)^{\frac{1}{2}}}dx$$
$$\boxed{dy=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx}$$

9. $y = \dfrac{2}{(x-1)^2}$

Se puede expresar como: $y = 2(x-1)^{-2}$

$$dy = 2(-2)(x-1)^{-2-1}(x-1)'\,dx$$

$$dy = (-4)(x-1)^{-3}(1)\,dx$$

$$dy = \frac{(-4)(1)}{(x-1)^3}\,dx$$

$$\boxed{dy = \frac{-4}{(x-1)^3}\,dx}$$

10. $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ Se puede expresar como: $y = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$dy = \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'\,dx$$

$$dy = \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{(x-1)'(x+1)-(x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$dy = \frac{1}{2}\frac{(x-1)^{-\frac{1}{2}}}{(x+1)^{-\frac{1}{2}}}\left(\frac{(1)(x+1)-(x-1)(1)}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$dy = \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}(x+1)^{-\frac{1}{2}}}\left(\frac{2}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$dy = \frac{2}{2(x-1)^{\frac{1}{2}}(x+1)^{-\frac{1}{2}}(x+1)^2}\,dx$$

$$dy = \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}(x+1)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

$$dy = \frac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt{(x+1)^3}}\,dx$$

$$\boxed{dy = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}\,dx}$$

11. $y = \text{Sen}(3x^2 - 1)$

$$dy = (3x^2 - 1)'\text{Cos}(3x^2 - 1)\,dx$$

$$\boxed{dy = 6x\,\text{Cos}(3x^2 - 1)\,dx}$$

12. $y = \text{Ln}(2x^3)$

$y = \dfrac{(2x^3)'}{2x^3}dx$

$y = \dfrac{6x^2}{2x^3}dx$

$\boxed{y = \dfrac{3}{x}dx}$

13. $y = \dfrac{2}{\text{Cot}(4x+3)}$ Se puede expresar como: $y = 2\,\text{Tan}(4x+3)$

$dy = 2(4x+3)'\,\text{Sec}^2(4x+3)dx$

$dy = 2(4)\text{Sec}^2(4x+3)dx$

$\boxed{dy = 8\,\text{Sec}^2(4x+3)dx}$

14. $y = e^{\frac{x+1}{x-1}}$

$y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)' e^{\frac{x+1}{x-1}}dx$

$dy = \left[\dfrac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}\right]e^{\frac{x+1}{x-1}}dx$

$dy = \left[\dfrac{(1)(x-1)-(x+1)(1)}{(x-1)^2}\right]e^{\frac{x+1}{x-1}}dx$

$dy = \left[\dfrac{-2}{(x-1)^2}\right]e^{\frac{x+1}{x-1}}dx$

$\boxed{dy = \dfrac{-2e^{\frac{x+1}{x-1}}}{(x-1)^2}dx}$

15. $y = \text{Sec}(x^2-7x+6)$

$dy = (x^2-7x+6)'\,\text{Sec}(x^2-7x+6)\text{Tan}(x^2-7x+6)dx$

$\boxed{dy = (2x-7)\,\text{Sec}(x^2-7x+6)\text{Tan}(x^2-7x+6)\,dx}$

Actividad: 5

Utilizando los teoremas, calcula las diferenciales de las siguientes funciones.

1. $y = 3x^2 - 11x + 5$

2. $y = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x + 7}{x^3}$

3. $y = \sqrt{7x + 6}$

4. $y = \text{Sen}\,(4x^2 - 8)$

5. $y = \text{Ln}\left(\dfrac{x^7 - 2}{x^2 + 2}\right)$

Actividad: 5 (continuación)

6. $y = e^{2x+7}$

7. $y = \text{Sec}\,(x^4)$

8. $y = \frac{1}{x} + \sqrt{x} - 1$

9. $y = \left(3x^8 + 5\right)^{10}$

10. $y = e^{\tan^2 x}$

Evaluación					
Actividad: 5	Producto: Ejercicios.			Puntaje:	
Saberes					
Conceptual	Procedimental			Actitudinal	
Reconoce la diferencial de una función.	Obtiene la diferencial de una función.			Aprecia la utilidad de las derivadas para obtener diferenciales de funciones.	
Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente	

■ Cierre

Actividad: 6

En equipo resuelvan los siguientes problemas:

1. Un fabricante de pelotas de plástico realiza la producción de 1000 pelotas de cierto modelo, cuya característica de diseño implica un diámetro de 30 cm y un espesor de 2 mm. Por motivo de un desajuste en la maquinaria, los encargados de control de calidad afirman que las pelotas han salido con un espesor de 2.3 mm. ¿Cuánto plástico en exceso se ha gastado aproximadamente en la producción?

2. Obtener el valor aproximado en el aumento que tendrá el área de una esfera de 8cm de radio cuando el radio aumenta 3cm.

Actividad: 6 (continuación)

3. La pared lateral de un depósito cilíndrico con radio de 60 cm y altura de 1.20m, debe revestirse con una capa de concreto de 3 cm de espesor. ¿Cuál es aproximadamente la cantidad de concreto que se requiere?

4. Un tanque de almacenamiento de aceite en forma de cilindro circular vertical tiene una altura de 5m. el radio mide 8m, con un error posible de $\pm$0.25m.Utilice diferenciales para calcular el error máximo en el volumen. Encuentre el error relativo aproximado y el porcentaje aproximado de error.

Actividad: 6 (continuación)

5. Una lata de aluminio para bebidas gaseosas mide 2.54 cm de radio y 17.3 cm de alto, mientras el espesor de la lámina con que está hecha es de 0.74 mm. Si simultáneamente se provocara un error máximo en radio, altura y espesor del k% en cada magnitud:
   a) ¿Cuánto varía en porcentaje el peso de la lata?
   b) ¿Cuánto varía en porcentaje la cantidad de lámina empleada para construir la lata?
   c) ¿Cuánto varía en porcentaje el volumen que puede contener la lata?
   d) En cada caso ¿Qué magnitud al variar resulta la más crítica: la altura, el radio o el espesor de la lata?
   e) ¿Qué valor máximo puede tener k si ninguna de las magnitudes mencionadas en los incisos a, b y c, debe de modificar su valor más de un 1.5%?

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 6</td><td colspan="3">Producto: Problemas aplicados.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Comprende la utilidad de la diferencial de una función en la solución de problemas cotidianos.</td><td colspan="3">Aplica la diferencial de una función para resolver problemas cotidianos.</td><td colspan="2">Es respetuoso con sus compañeros y aporta ideas para la resolución de los problemas.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Secuencia didáctica 2. La integral indefinida.

Inicio

Actividad: 1

Completa la siguiente tabla y contesta lo que se te solicita:

Función	Derivada
$f(x)=x^2$	$f'(x)=$
$f(x)=x^2+2$	$f'(x)=$
$f(x)=x^2+9$	$f'(x)=$
$f(x)=x^2-7$	$f'(x)=$
$f(x)=x^3$	$f'(x)=$
$f(x)=x^3-1/2$	$f'(x)=$
$f(x)=x^3+8$	$f'(x)=$

a) ¿Qué puedes decir de los resultados que obtuviste en la tabla?

b) Si sabes que la derivada de F(x) es la función $f(x)=3x^2$, ¿cómo es F(x)?

c) Si sabes que la derivada de F(x) es la función $f(x)=nx^{n-1}$, ¿cómo es F(x)?

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 1</td><td colspan="3">Producto: Complementación de la tabla y cuestionario.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Identifica el proceso inverso de la derivada de una función.</td><td colspan="3">Describe el proceso inverso de la derivada de una función.</td><td colspan="2">Se interesa por realizar la actividad.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Desarrollo

En el transcurso de tus estudios de bachillerato te has dado cuenta que en Matemáticas se habla de procedimientos inversos, en los cuales se puede incluir a las operaciones básicas, así como también algunos temas de álgebra, por ejemplo, en las operaciones básicas, se identifica la suma como el inverso de la resta, la multiplicación como el inverso de la división, la potenciación como la inversa de la radicalización y viceversa.

Otro ejemplo que se puede observar es el de los productos notables como lo inverso de la factorización y viceversa. En el curso de Cálculo Diferencial e Integral 1 trabajaste con el concepto de derivada, en el cual derivaste algunas funciones, no te has preguntado: ¿cuál será el proceso inverso a derivar una función? Es decir, si se conoce la derivada de una función, ¿cómo se puede conocer la función cuya derivada es la función que se conoce?

Definición de antiderivada.

Una antiderivada de una función $f(x)$ es otra función $F(x)$ que cumple:

$$F'(x) = f(x)$$

Ejemplo1.

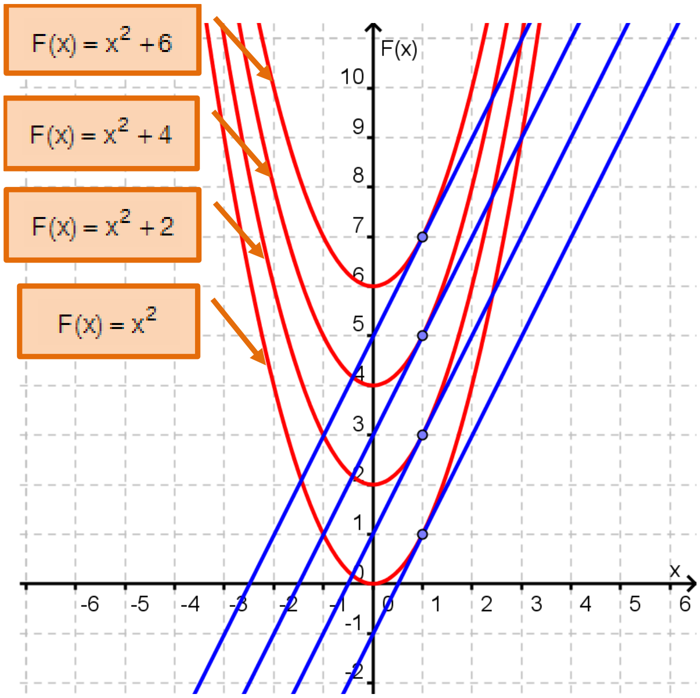
Al calcular la antiderivada de la función $f(x) = 2x$ se obtiene $F(x) = x^2$.

La justificación de lo anterior es debido a que $F'(x) = 2x$.

Pero ésta no es la única antiderivada que puede tener $f(x) = 2x$, porque también puede ser $F(x) = x^2 + 2$, debido a que $F'(x) = 2x$.

Esto significa que si se añade cualquier constante a $F(x) = x^2$, se formarán una infinidad de funciones, las cuales serán la antiderivada de $f(x) = 2x$.

Geométricamente se puede visualizar de la siguiente forma:



En la gráfica se observa varias funciones cuadráticas que se diferencian entre si debido a que se desplaza verticalmente dos unidades cada vez, es decir se tiene:

$F(x) = x^2$

$F(x) = x^2 + 2$

$F(x) = x^2 + 4$

$F(x) = x^2 + 6$

También se graficó la recta tangente en cada una de ellas, cuando x=1; nótese que todas las rectas son paralelas, es decir tienen la misma pendiente, por lo tanto, al ser la derivada de una función la pendiente de la recta tangente, se deduce que todas funciones anteriores tienen la misma derivada.

En este caso $F'(x) = 2x$

Como puedes observar, la antiderivada de una función *f*(*x*) no es única, ya que se puede encontrar una infinidad de funciones cuya derivada será f(x), sin embargo, es importante observar que todas esas funciones se diferenciarán únicamente por una constante, de tal forma que en general se dice que:

La antiderivada de la función f(x) es una función F(x) = g(x) + cte.

Donde "cte." es la constante arbitraria y $F'(x) = f(x)$.

1. $h(x) = 3x^2$, la antiderivada es $H(x) = x^3 + \text{cte.}$, pues $H'(x) = 3x^2$.

2. $m(x) = 4x^3$, la antiderivada es $M(x) = x^4 + \text{cte.}$, pues $M'(x) = 4x^3$.

3. $g(x) = 9$, la antiderivada es $G(x) = 9x + \text{cte.}$, pues $G'(x) = 9$.

4. $r(x) = -\frac{1}{4}$, la antiderivada es $R(x) = -\frac{1}{4}x + \text{cte.}$, pues $R'(x) = -\frac{1}{4}$.

5. $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 9$, la antiderivada es $F(x) = x^4 + x^3 + 9x + \text{cte.}$, pues $F'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 9$.

Actividad: 2

Encuentra la antiderivada de las siguientes funciones.

1. $f(x) = 4x^3 + 5x^4 - 8$

2. $f(x) = 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 2x + 8$

3. $f(x) = x + 3$

4. $f(x) = x^3 + x + 1$

5. $f(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 5x + 1$

Evaluación						
Actividad: 2	Producto: Ejercicio.			Puntaje:		
Saberes						
Conceptual	Procedimental			Actitudinal		
Reconoce la antiderivada de una función.	Calcula la antiderivada de una función.			Analiza y se interesa por realizar la actividad.		
Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente		

Integral indefinida.

La antidiferenciación es el proceso de determinación de todas las antiderivadas de una función dada.

El símbolo $\int$ denota la operación de antidiferenciación y se escribe de la siguiente manera:

$$\int f(x)dx = F(x) + \text{cte.}$$

donde:

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{y} \qquad d[F(x)] = f(x)dx$$

A $\int f(x)dx$ se le llama también *integral indefinida* de $f(x)$.

A continuación se ejemplificarán cómo calcular la integral indefinida de algunas funciones:

Ejemplos

1. $f(x) = 2x$

   $\int f(x)\,dx = \int 2xdx = x^2 + \text{cte.}$

2. $h(x) = 3x^2$

   $\int h(x)\,dx = \int 3x^2\,dx = x^3 + \text{cte.}$

3. $m(x) = 7x^6 + 6x^5 - 5x^4 + 3x^2 + 2x + 5$

   $\int m(x)\,dx = \int \left(7x^6 + 6x^5 - 5x^4 + 3x^2 + 2x + 5\right)dx = x^7 + x^6 - x^5 + x^3 + 2 + \text{cte.}$

Actividad: 3

Realiza lo que se pide.

1. Describe, paso a paso, el procedimiento para derivar la función $f(x) = x^n$.

Actividad: 3 (continuación)

2. Desarrolla el proceso inverso del punto anterior, para que describas la forma de encontrar la integral indefinida de $f(x) = x^n$.

3. Comprueba el procedimiento que describiste integrando la función $f(x) = x^7$, a su vez, comprueba la integral anterior derivando el resultado que obtuviste.

Evaluación						
Actividad: 3	Producto: Descripción.			Puntaje:		
Saberes						
Conceptual	Procedimental			Actitudinal		
Reconoce el proceso inverso de la derivada de una función.	Obtiene el proceso inverso de la derivada de una función.			Se interesa por realizar la actividad.		
Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente		

Así como el procedimiento que descubriste, se realizan otros para encontrar los teoremas que facilitan el cálculo de la integral indefinida, los cuales se enuncian en el siguiente cuadro.

Teoremas de integración directa.

1. $\int a\,dx = a\int dx = ax + \text{cte.}$
2. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \text{cte.} \qquad \text{si } n \neq -1$
3. $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \int x^{-1}dx = \text{Ln}\,|x| + \text{cte.}$
4. $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
5. $\int e^x dx = e^x + \text{cte.}$
6. $\int \text{sen}\,x\,dx = -\cos x + \text{cte.}$
7. $\int \cos x\,dx = \text{sen}\,x + \text{cte.}$
8. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + \text{cte.}$
9. $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + \text{cte.}$
10. $\int (\sec x)(\tan x)\,dx = \sec x + \text{cte.}$
11. $\int (\csc x)(\cot x)\,dx = -\csc x + \text{cte.}$

A continuación se muestran varios ejemplos en los cuales se utilizan los teoremas de integración directa.

Ejemplos:

1. $\int dx = x + \text{cte.}$

2. $\int 9\,dx = 9x + \text{cte.}$

3. $\int \dfrac{1}{2}\,dx = \dfrac{1}{2}x + \text{cte.}$

4. $$\int x^3\,dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + \text{cte.}$$
$$= \frac{x^4}{4} + \text{cte.}$$

5. $$\int x^7\,dx = \frac{x^{7+1}}{7+1} + \text{cte.}$$
$$= \frac{x^8}{8} + \text{cte.}$$

6. $\int 3x^2\,dx = 3\int x^2\,dx = 3\left(\frac{x^{2+1}}{2+1} + c\right) = x^3 + \text{cte.}$

$$= 3\left(\frac{x^3}{3} + \text{cte.}\right)$$

$$= x^3 + \text{cte.}$$

7. $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \text{cte.}$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \text{cte.}$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \text{cte.}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \text{cte.}$$

8. $\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + \text{c te.}$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + \text{cte.}$$

9. $\int \frac{5}{x}dx = 5\int \frac{1}{x}dx = 5\,\text{Ln}\,|x| + \text{cte.}$

10. $\int (x^2 + 3)\,dx = \int x^2 dx + \int 3\,dx = \frac{x^3}{3} + 3x + \text{cte.}$

11. $\int (x^4 - x^3 + 8x^2 - 9x + 11)\,dx = \int x^4 dx - \int x^3 dx + 8\int x^2 dx - 9\int x\,dx + 11\int dx$

$$= \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{8x^3}{3} - \frac{9x^2}{2} + 11x + \text{cte.}$$

12. $\int \left(e^x + \cos x\right)dx = \int e^x dx + \int \cos x\,dx = e^x - \text{sen}\,x + \text{cte.}$

13. $\int \left(\csc^2 x + \text{sen}\,x + e^x\right)dx = \int \csc^2 x\,dx + \int \text{sen}\,x\,dx + \int e^x dx$

$$= -\cot x - \cos x + e^x + \text{cte.}$$

Actividad: 4

Calcula las integrales de las funciones, utilizando los teoremas.

1. $\int 4\,dx$

2. $\int \pi\,dx$

3. $\int 5x^4\,dx$

4. $\int 7x^6\,dx$

5. $\int (3x^2 - 2x + 1)\,dx$

6. $\int (2x - 4)\,dx$

7. $\int -\csc^2 x\,dx$

8. $\int \sec x \cdot \tan x\,dx$

9. $\int (4x^3 + 3x^2 + 2x + 1)\,dx$

10. $\int (e^x + \sec x \cdot \tan x - \csc x \cdot \cot x)\,dx$

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 4</td><td colspan="3">Producto: Ejercicios.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Distingue la antiderivada de una función, para expresar su integral indefinida.</td><td colspan="3">Calcula la integral indefinida de una función.</td><td colspan="2">Expresa sus dudas y corrige sus errores.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

En los ejemplos anteriores se integraron paso a paso algunas funciones, pero esto se puede simplificar, al igual que se pueden realizar varias operaciones para poder facilitar la integración, como se muestra en los siguientes ejemplos:

1. $$\int (6x^3 - 3x + 8)\,dx = \frac{6x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 8x + cte.$$
$$= \frac{3}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 8x + cte.$$

2. $$\int (5x^2 - 4)(x-4)\,dx = \int \left(5x^3 - 20x^2 - 4x + 16\right)dx$$
$$= \frac{5x^4}{4} - \frac{20x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 16x + cte.$$
$$= \frac{5}{4}x^4 - \frac{20}{3}x^3 - 2x^2 + 16x + cte.$$

3. $$\int \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + 9x - 4x - 4\right)dx = \int \left(\frac{1}{x} - 3x^{-2} + 5x - 4\right)dx$$
$$= Ln(x) - \frac{3x^{-1}}{-1} + \frac{5x^2}{2} - 4x + cte.$$
$$= Ln(x) + \frac{3}{x} + \frac{5}{2}x^2 - 4x + cte.$$

4. $$\int (3x-7)^2\,dx = \int \left(9x^2 - 42x + 49\right)dx$$
$$= \frac{9x^3}{3} - \frac{42x^2}{2} + 49x + cte.$$
$$= 3x^3 - 21x^2 + 49x + cte.$$

5. $$\int (5x-1)^3\,dx = \int \left(125x^3 - 75x^2 + 15x - 1\right)dx$$
$$= \frac{125x^4}{4} - \frac{75x^3}{3} + \frac{15x^2}{2} - 1x + cte.$$
$$= \frac{125x^4}{4} - 25x^3 + \frac{15}{2}x^2 - x + cte.$$

6. $$\int (e^x + 5\csc^2 x)\,dx = e^x + 5\cot(x) + cte.$$

7. $\int (\sqrt{x} + 1)\ dx = \int (x^{\frac{1}{2}} + 1)\ dx$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 1x + \text{cte.}$$
$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x + \text{cte.}$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + x + \text{cte.}$$

8. $\int (\operatorname{sen} x + \cos x + \sec^2 x - \csc x \cot x)\,dx = \cos x - \operatorname{sen}\ x + \tan x - \csc x + \text{cte.}$

9. $\int \left(\frac{4x^5 - 5x^4 - 2x + 3}{x^3} \right) dx = \int \left(4x^2 - 5x - 2x^{-2} + 3x^{-3}\right) dx$

$$= \frac{4x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - \frac{2x^{-1}}{-1} + \frac{3x^{-2}}{-2} + \text{cte.}$$
$$= \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2} + \text{cte.}$$

10. $\int (x^3 - 3x^2 + 2x + x^{-1} - x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{2}{3}} + 1)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + \text{Ln}(x) - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + 1x + \text{cte.}$

$$= \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + \text{Ln}(x) - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 3\sqrt[3]{x} + x + \text{cte.}$$

Sitios Web recomendados:

Ingresa a la siguiente liga, en ella se te ofrecen varios videos que te pueden ayudar a practicar las integrales. También se te ofrece la liga para descargar el programa Derive y así comprobar los resultados.

http://www.youtube.com/results?search_query=juanmemol+integrales&aq=3&oq=juanmemol

http://derive.softonic.com/

Cierre

Actividad: 5

Resuelve las siguientes integrales y, posteriormente, compruébalas mediante derivación o utilizando el programa Derive.

1. $\int (2x^3 - 5x^2 + 8x - 20)\,dx$

2. $\int (x^{10} - 5x^4 - 9x + 1)\,dx$

3. $\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x} - \frac{8}{x^4}\right) dx$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{x^5}}\,dx$

5. $\int \left(4x^3 - \frac{1}{x} + 3\,\mathrm{Cos}\,x - e^x + 1\right) dx$

Actividad: 5 (continuación)

6. $\int \frac{x^3+27}{x+3}\,dx$

7. $\int \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\,dx$

8. $\int \frac{x^2-8x+15}{x-3}\,dx$

9. $\int (4x+1)^2\,dx$

10. $\int (2x-1)^3\,dx$ |

11. $\int \left(\sqrt[3]{x^4}-\sqrt{x^3}-\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}-1\right)dx$

Actividad: 5 (continuación)

12. $\int (2x+1)(3x^2+3)\,dx$

13. $\int \dfrac{5x^4-8x^3+9x+7}{x^7}\,dx$

14. $\int \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^7}} - \dfrac{3}{x^4} - 5 \right) dx$

15. $\int \dfrac{x^2-9}{x+3}\,dx$

Evaluación						
Actividad: 5	Producto: Ejercicios.			Puntaje:		
Saberes						
Conceptual	Procedimental			Actitudinal		
Ubica los teoremas sobre integrales indefinidas, para realizar los cálculos necesarios.	Calcula las integrales indefinidas utilizando los teoremas.			Aprecia la facilidad de los teoremas para la obtención de integrales indefinidas.		
Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente		

BLOQUE 2

Aplica el teorema fundamental del Cálculo.

Competencias disciplinares:

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Unidad de competencia:

- Aplica la integral definida y el teorema fundamental del cálculo a la solución de problemas de área bajo una gráfica en situaciones de aplicación de las ciencias naturales y sociales; a partir del conocimiento de las propiedades de la integral definida; mostrando una actitud analítica, reflexiva y colaborativa.

Atributos a desarrollar en el bloque:

4.1. Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
5.4. Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
5.6. Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
6.1. Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.
7.1. Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.
8.1. Propone maneras de solucionar un problema y desarrolla un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
8.2. Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
8.3. Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Tiempo asignado: 15 horas

Secuencia didáctica 1.
La integral definida.

Inicio

Actividad: 1

Desarrolla lo que se solicita.

1. Observa la siguiente expresión: $\sum_{n=1}^{4} n$

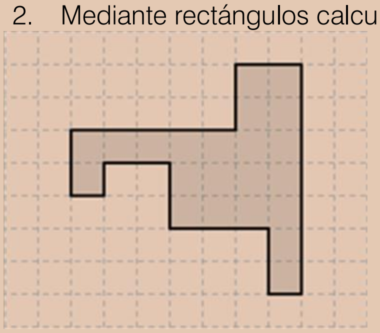
a) ¿Qué significa el símbolo Σ?

b) ¿Qué representa “n”?

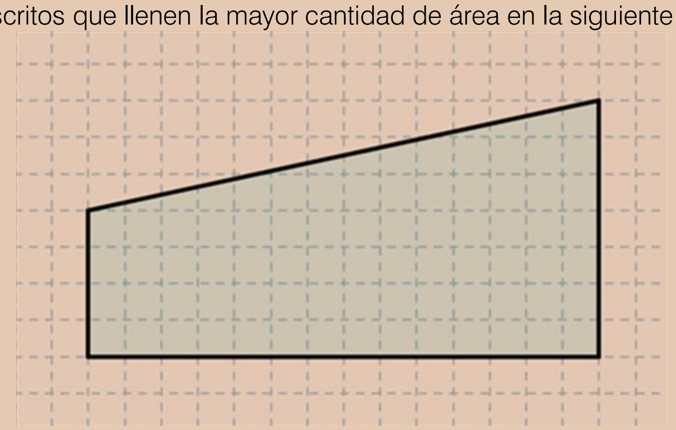
c) Escribe cómo se traduce la expresión completa.

d) ¿Qué resultado se obtiene de dicha expresión?

2. Mediante rectángulos calcula el área de la siguiente figura.



3. Dibuja rectángulos inscritos que llenen la mayor cantidad de área en la siguiente figura.



4. ¿Qué puedes hacer para abarcar más área al dibujar los rectángulos inscritos en el planteamiento anterior?

<table>
<tr><th colspan="7">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 1</td><td colspan="4">Producto: Cuestionario y dibujos.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="7">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="4">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Reconoce la notación sumatoria e identifica el área de figuras geométricas.</td><td colspan="4">Describe la notación sumatoria y obtiene el área de figuras geométricas mediante la aproximación de áreas de rectángulos.</td><td colspan="2">Muestra interés al realizar la actividad.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td colspan="2" rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Desarrollo

Actividad: 2

En equipo investiguen lo siguiente:

1. ¿Qué es una sucesión?

2. ¿Cómo se representa la suma finita de los términos de una sucesión?

3. ¿Cómo se representa la suma infinita de los términos de una sucesión?

4. Escribe 3 ejemplos de una suma finita de los términos de una sucesión.

5. Escribe 3 ejemplos de la suma infinita de los términos de una sucesión.

Comenten en el grupo las conclusiones.

<table>
<tr><th colspan="7">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 2</td><td colspan="4">Producto: Ejemplos.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="7">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="4">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Describe sumas finitas e infinitas de una sucesión.</td><td colspan="4">Ejemplifica las sumas finitas e infinitas de una sucesión de términos.</td><td colspan="2">Expresa su punto de vista y es respetuoso con la aportación de sus compañeros.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td colspan="2" rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Esta asignatura es la culminación de tus estudios en el campo de las Matemáticas a nivel medio superior, habrás notado que en este último semestre has necesitado recuperar múltiples conocimientos previos de los semestres anteriores. Para iniciar la presente secuencia, se requiere que hayas aprendido el tema de sucesiones y series que viste en la asignatura de Matemáticas 1.

Actividad: 3

Resuelve las siguientes sumas.

1. $\sum_{k=1}^{5}(3k-1)=$
2. $\sum_{k=1}^{6}2k^2=$
3. $\sum_{i=1}^{5}(-1)^i\ 2^{i-1}=$
4. $\sum_{j=1}^{4}\frac{2}{j+1}=$
5. $\sum_{k=1}^{6}k\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right)=$
6. $\sum_{j=2}^{6}(j+1)^2=$
7. $\sum_{k=1}^{6}\cos(k\pi)=$

Expresa mediante notación de sumatoria, las siguientes sumas.

1. $1+2+3+.\cdots+98$
2. $2+4+6+\cdots+100$
3. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{69}$
4. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{50}$

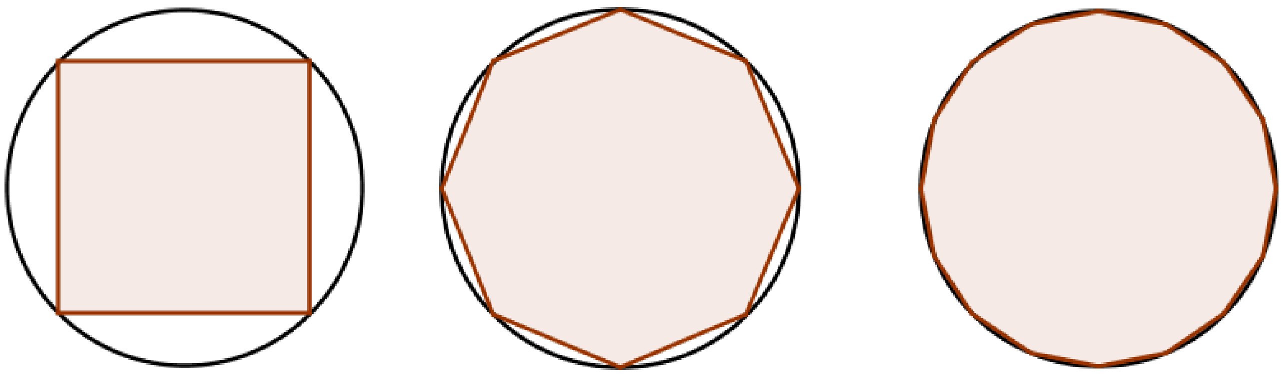
<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 3</td><td colspan="3">Producto: Ejercicios.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Identifica la notación sumatoria.</td><td colspan="3">Obtiene la sumatoria de términos finitos, así como expresa en notación sumatoria, la suma de términos finitos.</td><td colspan="2">Expresa sus dudas y corrige sus errores.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Área bajo la curva.

Dos problemas motivaron las dos más grandes ideas del Cálculo. El problema de la tangente que condujo a la derivada y el problema del área que llevará a la integral definida.

Para encontrar áreas de polígonos no es dificultad, debido a que se empieza por definir el área de un rectángulo como el producto de su longitud por su ancho (ambas medidas con las mismas unidades) y a partir de esto se deducen en sucesión áreas de polígonos.

El problema se presenta cuando se considera obtener el área limitada por una curva. Sin embargo, hace más de 2000 años, Arquímedes dio la clave para su solución, considérese, dijo, una sucesión de polígonos inscritos que se aproximen a la región curva con una precisión cada vez más grande. Por ejemplo, para el círculo de radio 1, considérense polígonos inscritos P_1, P_2, P_3,…, de 4 lados, 8, 16,…, como se muestra a continuación:



El área del círculo es el límite cuando $n \to \infty$ de las áreas de P_n , por lo tanto:

$$A(\text{círculo}) = \lim_{n \to \infty} A(P_n)$$

Siendo A, el área.

Actividad: 4

Analiza la siguiente situación y desarrolla lo que se solicita.
Fernanda es estudiante del Colegio de Bachilleres del plantel Nogales. Ella pretende estudiar en la Universidad de Sonora. Para transportarse requiere comprar un auto de $60,000.00; para ello, solicitó trabajo en una maquiladora de la localidad con el fin de ahorrar todo su salario. La licenciada de Recursos Humanos de la empresa le informó que su sueldo se incrementará cada mes en los primeros 3 años laborados, de acuerdo a la siguiente función:

$$S(x) = 200\sqrt{x} + 30T$$

Donde “S” es el salario mensual, “x” representa el mes laborado y T es el salario mínimo que se aplica en este momento.

También le comentó que después de los 3 años, su salario se incrementa de acuerdo al aumento salarial del Distrito Federal.

a) Investiga cuánto es el salario mínimo.

b) Expresa la función S(x) sustituyendo el valor del salario mínimo.

Actividad: 4 (continuación)

c) Traza la gráfica correspondiente a S(x).

d) Ubica un punto cualquiera sobre la función y expresa sus coordenadas.

e) ¿Qué significa la abscisa del punto dibujado?

f) ¿Qué significa la ordenada del punto dibujado?

g) ¿Cómo puedes representar en la gráfica la cantidad que Fernanda ahorró en medio año?

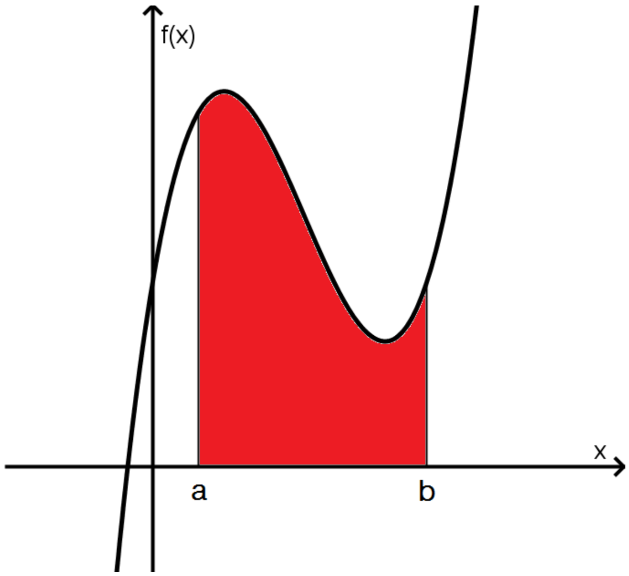
h) ¿De qué forma podrías obtener dicha cantidad?

i) ¿En cuánto tiempo podrá comprar su auto?

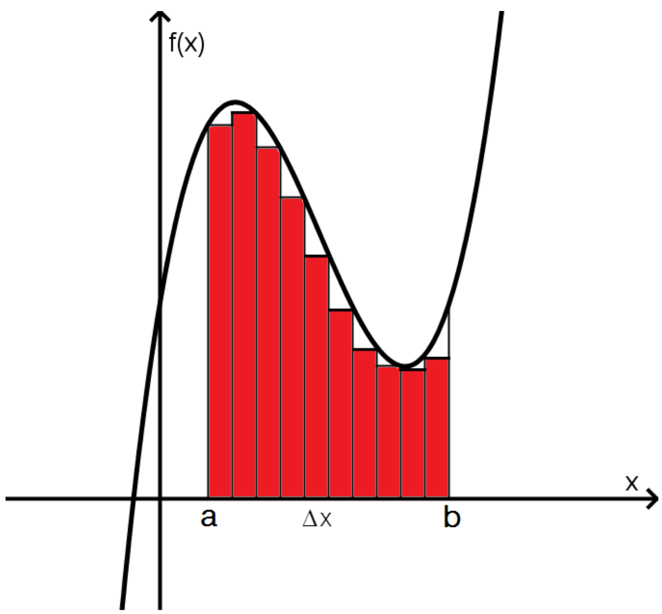
j) ¿Podrá obtenerlo antes de iniciar sus estudios superiores, si está iniciando el tercer semestre de Bachillerato?

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 4</td><td colspan="3">Producto: Cuestionario.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Relaciona el valor de la función con el área bajo la curva que describe la misma.</td><td colspan="3">Aplica el área bajo la curva en la solución de una situación.</td><td colspan="2">Aporta sus resultados en la retroalimentación de la actividad.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

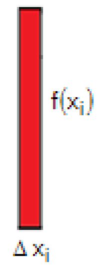
Para encontrar el área de cualquier superficie sin importar su forma, como se muestra en la siguiente figura:



Observa que la región está comprendida entre la función, el eje X, la recta x=a y la recta x=b. Para calcular el área de la región, se divide en una serie de rectángulos de base Δx, con el propósito de sumar todos los rectángulos y obtener una aproximación del área total.



Considerando que ya se vio la notación sumatoria, se puede enunciar la suma de los rectángulos en una sola expresión, para ello se toma un valor x_i, dentro del intervalo [a,b], tal que exista Δx_i y un $f(x_i)$, de tal manera que se cumpla que:



De esta manera se puede calcular el área de ese rectángulo:

$$A=(f(x_i))(\Delta x_i)$$

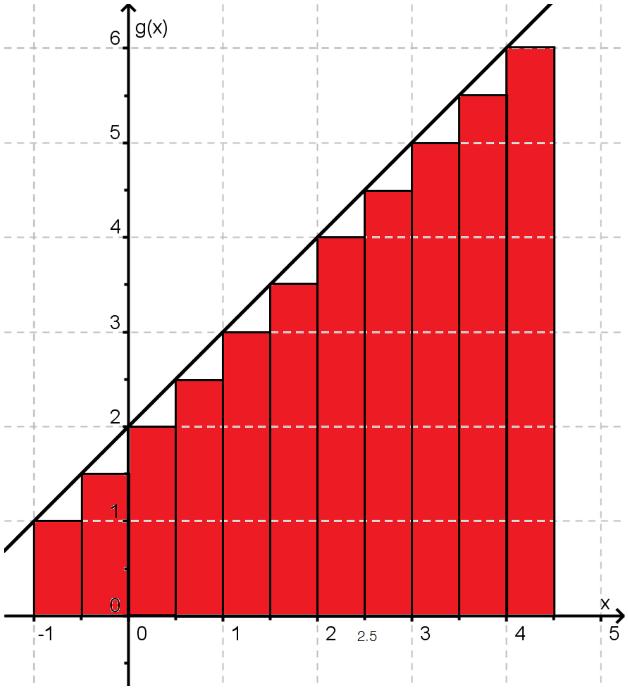
Esto es, la altura del rectángulo por su base. Si se considera a x_i, como cualquier partición del eje X que determina un rectángulo dentro del área, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n}(f(x_i))(\Delta x_i)$$

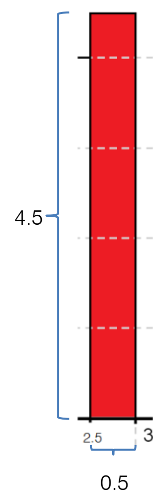
Representa el área aproximada de la región que se desea.

Ejemplo 1.
Calcular el área aproximada bajo la función $g(x)=x+2$ entre $x=-1$ y $x=4.5$, con rectángulos cuya base mide la mitad de la unidad.

La función g(x) es lineal; al trazarla y dibujar los rectángulos cuya base miden 0.5 u se obtiene una buena aproximación, sin embargo, a medida que se tomen rectángulos más pequeños se obtendrá una mejor aproximación.



La altura de cada uno de los rectángulos es el valor correspondiente al extremo derecho de la base del rectángulo sustituido en la función, por ejemplo si se toma uno de los rectángulos, se tiene como base y altura:



Por lo tanto, el área de esta pequeña sección es (0.5)(4.5)=2.25 unidades cuadradas.

Ahora se obtendrá el área total, la cual se obtiene mediante la suma de las áreas de los rectángulos es:

$$A=\sum_{i=1}^{11}g(x_i)\Delta x_i$$

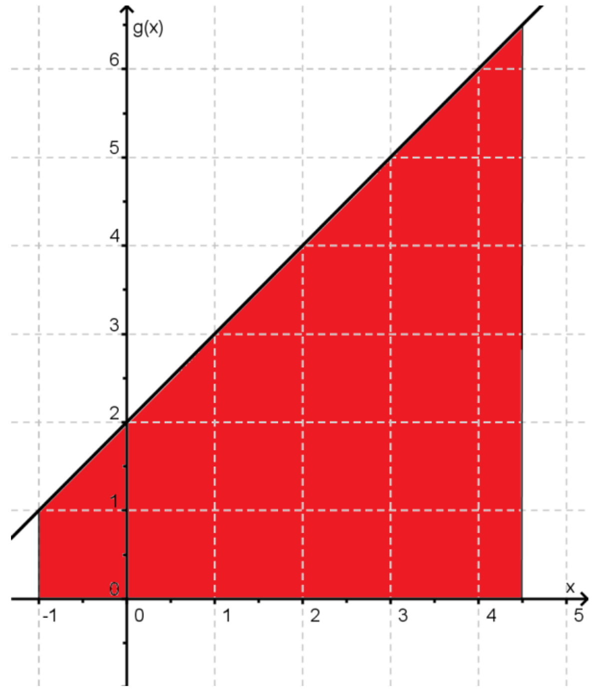
$$A=g(-1)\cdot(0.5)+g(-0.5)\cdot(0.5)+g(0)\cdot(0.5)+g(0.5)\cdot(0.5)+g(1)\cdot(0.5)+g(1.5)\cdot(0.5)$$
$$+g(2)\cdot(0.5)+g(2.5)\cdot(0.5)+g(3)\cdot(0.5)+g(3.5)\cdot(0.5)+g(4)\cdot(0.5)$$

$$A=(1)\cdot(0.5)+(1.5)\cdot(0.5)+(2)\cdot(0.5)+(2.5)\cdot(0.5)+(3)\cdot(0.5)+(3.5)\cdot(0.5)$$
$$+(4)\cdot(0.5)+(4.5)\cdot(0.5)+(5)\cdot(0.5)+(5.5)\cdot(0.5)+(6)\cdot(0.5)$$

$$A=19.25$$

El resultado obtenido (19.25 u^2) es una aproximación al valor real del área de la región deseada.

En este caso, al ser una función lineal, se puede conocer el área exacta, ya sea obteniendo las sumas de los triángulos que faltaron, o bien, utilizando la fórmula del área de un trapecio, cuya fórmula es:



$$A = \frac{(\text{base mayor} + \text{base menor})(\text{altura})}{2}$$

$$A = \frac{(6.5+1)(5.5)}{2}$$

$$A = 20.625 \text{ u}^2$$

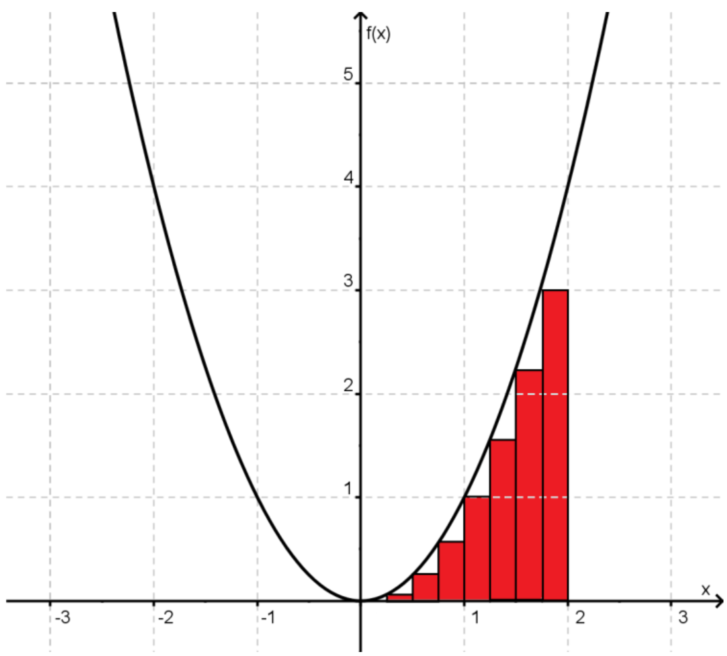
Si notas en la aproximación obtenida mediante la partición y la medida exacta, hay 1.375 unidades de diferencia, esta cantidad se puede hacer menor si se toman particiones mucho más pequeñas.

Ahora te preguntarás para qué realizar particiones si se tiene una fórmula, como la del área del trapecio, que proporciona el área exacta. Pues bien, ésta se puede utilizar siempre y cuando la función sea una recta, de no ser así, se tiene que recurrir a la partición, para muestra de ello, se realiza el siguiente ejemplo.

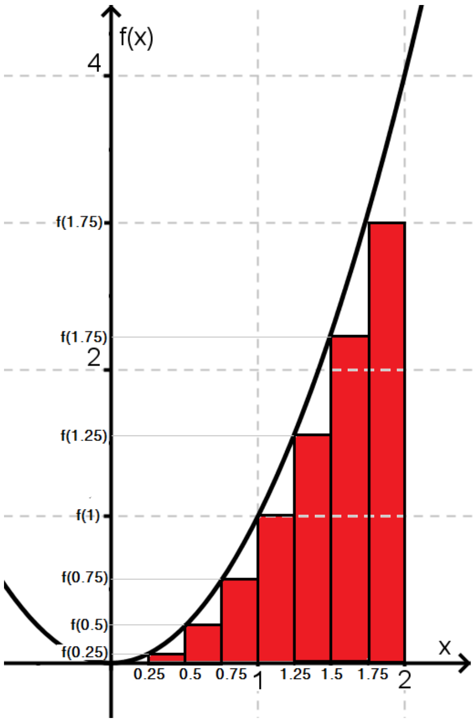
Ejemplo 2.

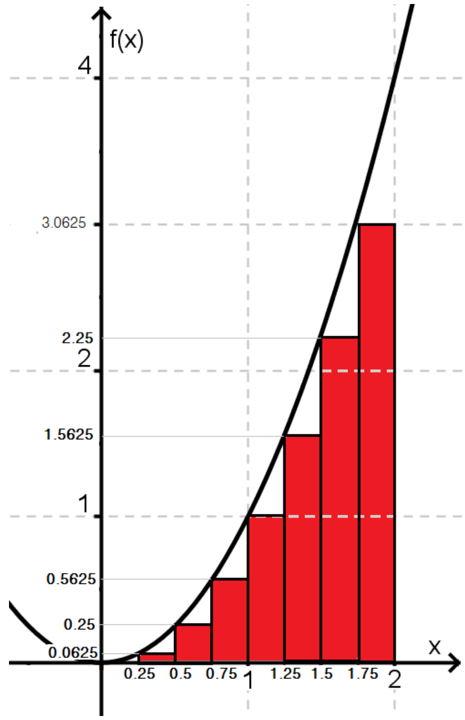
Calcular el área aproximada bajo la función $f(x) = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 2$, con rectángulos cuya base mide un cuarto de unidad.

Primero se traza la función y los rectángulos que cubrirán el área que se desea, como se muestra en la figura.



Posteriormente, se calculan cada una de las áreas de los rectángulos dibujados, cuya base mide 0.25 u, y su altura mide lo correspondiente al valor de la función evaluada en el extremo derecho de la base de cada rectángulo, como se muestra en ambas figuras:





Por lo tanto el área correspondiente es la suma de las áreas de los rectángulos.

$$A = \sum_{i=1}^{8} f(x_i)\Delta x_i$$

$$\begin{aligned} A &= f(0)\cdot(0.25) + f(0.25)\cdot(0.25) + f(0.5)\cdot(0.25) + f(0.75)\cdot(0.25) + f(1)\cdot(0.25) + f(1.25)\cdot(0.25) + f(1.5)\cdot(0.25) + f(1.75)\cdot(0.25) \\ &= (0)(0.25) + (0.0625)(0.25) + (0.25)(0.25) + (0.5625)(0.25) + (1)(0.25) + (1.5625)(0.25) + (2.25)(0.25) + (3.0625)(0.25) \\ &= 0 + 0.015625 + 0.0625 + 0.140625 + 0.25 + 0.390625 + 0.5625 + 0.765625 \\ &= 2.1875 \end{aligned}$$

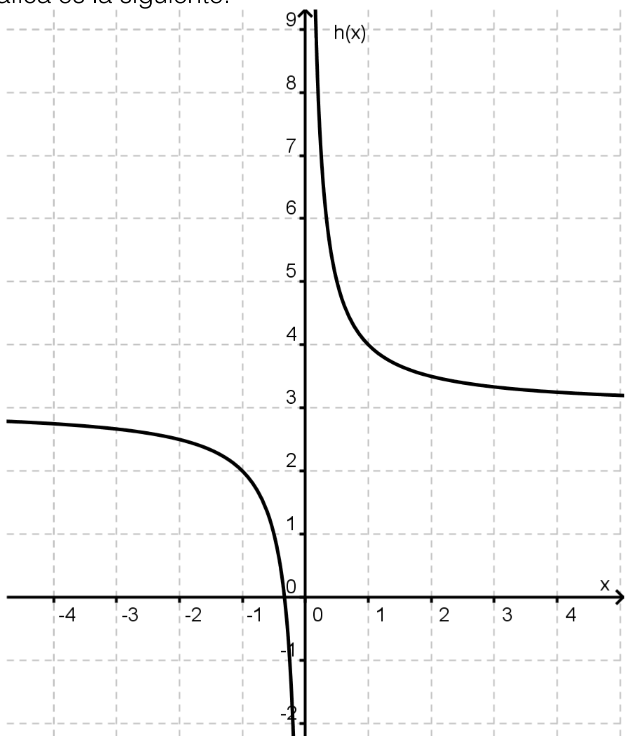
Por lo tanto, el área aproximada por debajo de la función $f(x) = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 2$, es 2.1875 u^2.

Nótese que en los dos ejemplos anteriores, los rectángulos que aproximan al área están por debajo de la función, por lo que también se podría obtener una aproximación con rectángulos que se tomen por encima de la función, como en el siguiente ejemplo.

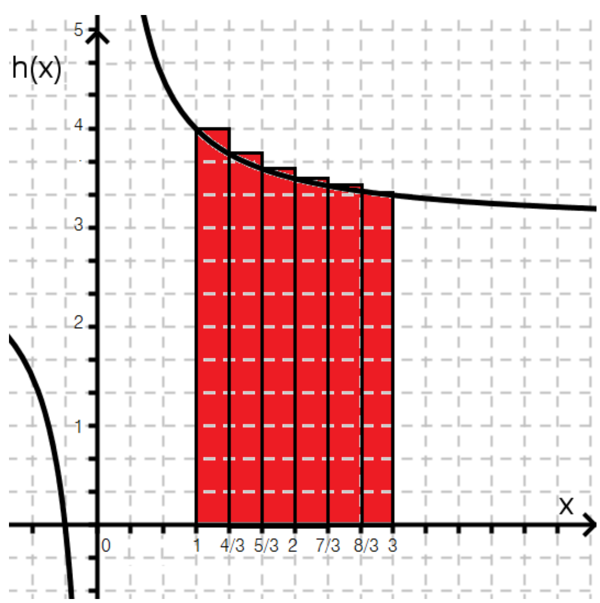
Ejemplo 3.

Calcular el área aproximada bajo la función $h(x)=\frac{1}{x}+3$ entre $x=1$ y $x=3$, con rectángulos cuya base mide un tercio de unidad.

Esta función es racional y su gráfica es la siguiente:



Ahora haciendo un acercamiento al área que interesa y considerando rectángulos por encima de la función, la partición queda:



Posteriormente, se calculan cada una de las áreas de los rectángulos dibujados, cuya base mide 1/3 u, y su altura mide lo correspondiente al valor de la función evaluada en el extremo derecho de la base de cada rectángulo.

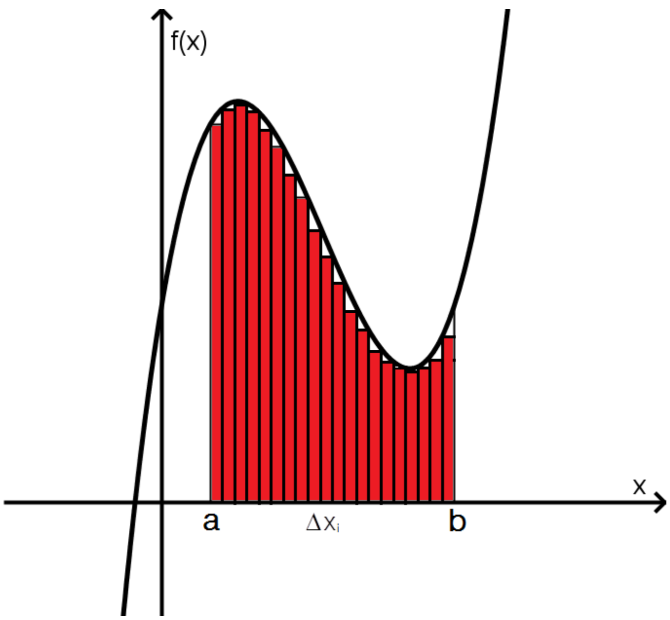
$$A = \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\Delta x_i$$

$$\begin{aligned} A &= h(1)\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)+h\left(\tfrac{4}{3}\right)\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)+h\left(\tfrac{5}{3}\right)\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)+h(2)\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)+h\left(\tfrac{7}{3}\right)\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)+h\left(\tfrac{8}{3}\right)\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right) \\ &= (4)\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)+\left(\tfrac{15}{4}\right)\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)+\left(\tfrac{18}{5}\right)\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)+\left(\tfrac{7}{2}\right)\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)+\left(\tfrac{24}{7}\right)\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)+\left(\tfrac{27}{8}\right)\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right) \\ &= \tfrac{4}{3}+\tfrac{5}{4}+\tfrac{6}{5}+\tfrac{7}{6}+\tfrac{8}{7}+\tfrac{9}{8} \\ &= \tfrac{2021}{280} \approx 7.2179 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el área aproximada por debajo de la función $h(x)=\frac{1}{x}+3$ entre $x=1$ y $x=3$ es 7.2179 u^2.

Integral de Riemann.

Ahora bien, volviendo a una función cualquiera y recordando que Δx_i representa cada una de las particiones de la región, si ésta se hace tan pequeña como se pueda, se obtendrán un mayor número de rectángulos que dará una mejor aproximación al área que se busca, como se puede observar en la siguiente figura:



De aquí se puede deducir que si se halla el límite cuando el número de rectángulos sea muy grande o cuando las longitudes de las bases de esos rectángulos sean muy pequeñas, se logrará la mejor y más exacta aproximación del área. Esto se representa así:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i))(\Delta x_i)$$

Con esto ya se encontró la mejor aproximación del área.

Ahora sí se puede enunciar la integral definida ya que:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i))(\Delta x_i)$$

Por lo tanto, se puede deducir que la integral definida es una suma, de esta manera, también se ha mostrado la primera aplicación de la integración definida, hallar el área bajo una curva.

La notación de la integral definida y las partes que la componen, son:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Toda la expresión se lee:

Integral de f(x) desde a hasta b

Donde "a" y "b" son los límites de integración, donde "a" es el límite inferior y "b" es el límite superior.

A esta integral se le conoce como *la integral de Riemann*.

Es preciso aclarar que la definición anterior es hasta cierto punto muy intuitiva, si tienes oportunidad de consultar un libro de cálculo de nivel superior te darás cuenta que para comprender bien el concepto de integral definida, se requiere de definiciones más elaborados tales como *sumas de Riemann*, particiones irregulares, etc. Para este fin es suficiente la anterior definición.

Es importante notar que las integrales definidas y las indefinidas son identidades diferentes. Una integral definida es un *número* mientras que una integral indefinida es *una familia de funciones.*

De la misma forma que en las derivadas, existen teoremas que permiten calcularla de manera práctica y sencilla, en el caso de la integral definida también se cuenta con herramientas que facilitan su cálculo, tal es el caso del *teorema Fundamental del Cálculo Integral*, el cual se enuncia a continuación.

Si una función f(x) es continua sobre el intervalo cerrado [a,b] y F(x) es una integral indefinida de f(x) sobre el intervalo [a,b], entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Esto es, si se desea obtener la integral en un intervalo cerrado, se requiere restar la integral indefinida evaluada en el límite superior del intervalo menos la evaluada en el límite inferior del intervalo. Con este procedimiento se estaría obteniendo el área bajo la curva de una forma exacta. A continuación se mostrarán algunos ejemplos.

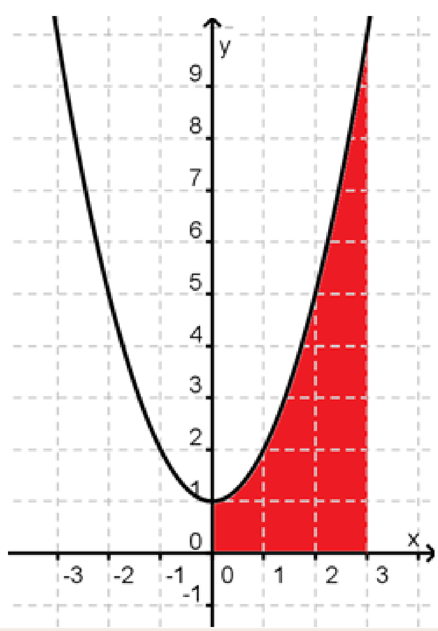
Ejemplo 1.

Obtener $\int_0^3 (x^2 + 1)\, dx$.

Primero se obtiene la integral indefinida y posteriormente se evaluan los límites del intervalo, que en este caso son 0 y 3.

$$\int_0^3 (x^2 + 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]\Bigg|_0^3 = \left[\frac{(3)^3}{3} + (3)\right] - \left[\frac{(0)^3}{3} + (0)\right] = [9 + 3] - [0] = 12$$

Este resultado representa el área que se muestra en la siguiente gráfica.



Ejemplo 2.

Calcula $\int_{-1}^{1}(4x^3+5x^2-x+1)\,dx$

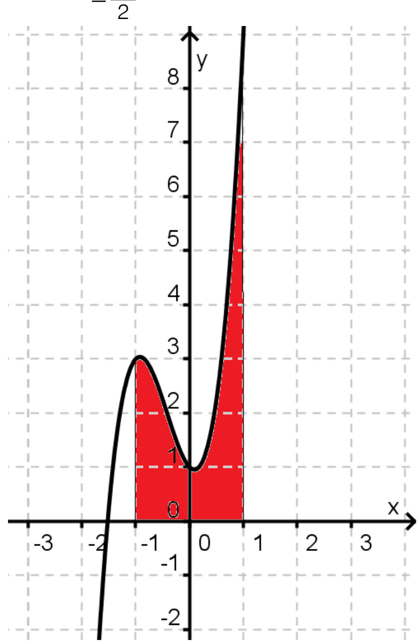
A continuación se procede a obtener la integral indefinida para evaluarla en los límites de integración indicados.

$$\int_{-1}^{1}(4x^3+5x^2-x+1)\,dx=\left[x^4+\tfrac{5}{3}x^3-\tfrac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{1}=\left[(1)^4+\tfrac{5}{3}(1)^3-\tfrac{1}{2}(1)^2+(1)\right]-\left[(-1)^4+\tfrac{5}{3}(-1)^3-\tfrac{1}{2}(-1)^2+(-1)\right]$$

$$=\left[1+\tfrac{5}{3}-\tfrac{1}{2}+1\right]-\left[1-\tfrac{5}{3}-\tfrac{1}{2}-1\right]$$

$$=\left[\tfrac{19}{3}\right]-\left[-\tfrac{13}{6}\right]$$

$$=\tfrac{17}{2}$$



Ejemplo 3.

Calcular $\int_{0}^{\pi/2}\operatorname{sen}x\,dx$.

Recuerda que tienes que basarte en los teoremas de integrales.

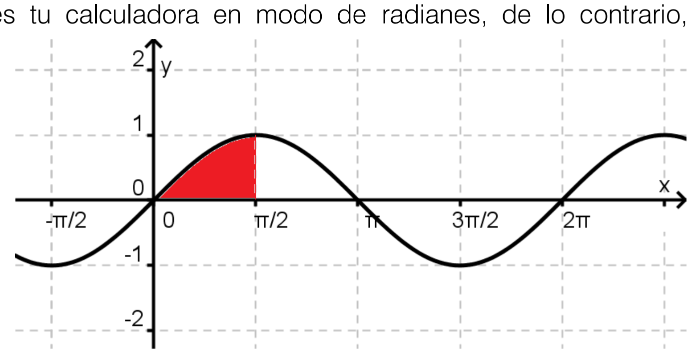
$$\int_{0}^{\pi/2}\operatorname{sen}x\,dx=-\cos x\Big|_{0}^{\pi/2}=\left[-\cos\left(\pi/2\right)\right]-\left[-\cos(0)\right]$$

Para evaluar la función tangente, es preciso que utilices tu calculadora en modo de radianes, de lo contrario, obtendrás un resultado erróneo.

$$\int_{0}^{\pi/2}\operatorname{sen}x\,dx=\left[-\cos\left(\pi/2\right)\right]-\left[-\cos(0)\right]$$

$$=\left[-0\right]-\left[-1\right]$$

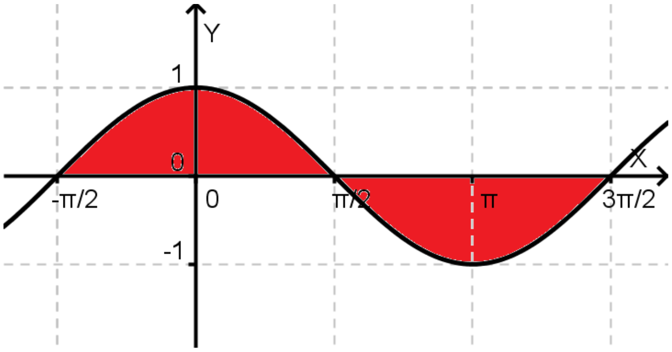
$$=1$$



Ejemplo 4.

Calcular el valor de la integral $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \, dx$

Al graficar la función se visualiza el área deseada.



Las raíces correspondientes son $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, las cuales cortan a la función en el eje X en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, mismo que determina los límites de la integral definida.

Si notas, existe una sección por encima del eje X: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; también existe una sección por debajo del eje X: $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Para calcular el área, se tomarán las integrales por intervalos.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \operatorname{sen} x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = [1] - [-1] = 2$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \, dx = \operatorname{sen} x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = [-1] - [1] = -2$$

El hecho que se haya obtenido el resultado negativo, es debido a que esta sección se encuentra por debajo del eje X, pero se sabe que no existen áreas negativas, así que el resultado final es:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \, dx = 2 + 2 = 4$$

Actividad: 5

Calcula el valor de las siguientes integrales definidas.

1) $\int_{-1}^{1} (3x^2 + x + 1) \, dx$

2) $\int_{-2}^{3} (x^2 + 5x + 1) \, dx$

Actividad: 5 (continuación)

3) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{2\pi} \operatorname{Sec}^2 x \, dx$

4) $\int_{-1}^{2} \frac{x}{x^2 - 9} \, dx$

5) $\int_{-5}^{5} 5 \, dx$

6) $\int_{2}^{4} \frac{x}{x - 5} \, dx$

7) $\int_{-1}^{3} x \, dx$

8) $\int_{-3}^{3} (2x + 3) \, dx$

9) $\int_{-1}^{2} x(1 - x^2) \, dx$

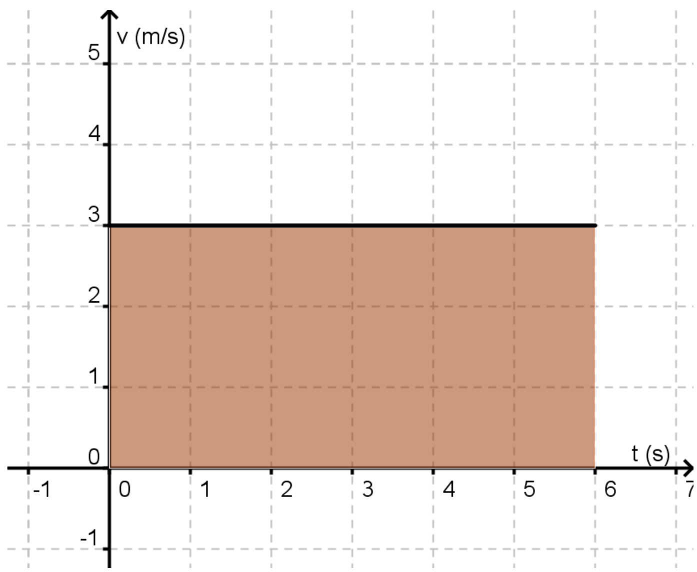
10) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{5}{4}} x^3 \, dx$

<table>
<tr><th colspan="7">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 5</td><td colspan="3">Producto: Ejercicios.</td><td colspan="3">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="7">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="3">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Distingue la integral definida de varias funciones.</td><td colspan="3">Practica la integral definida de varias funciones.</td><td colspan="3">Expresa sus dudas y corrige sus errores.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2" colspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Así como al derivar la función velocidad, que describe un vehículo, se obtiene la función aceleración, en sentido inverso, si se integra la función aceleración se obtiene la velocidad y a su vez, si se integra ésta, se obtiene la distancia recorrida, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 5.
Calcular la distancia recorrida por un cuerpo que se mueve con una velocidad constante de 3 m/s, durante los primeros 6 segundos de movimiento.

El hecho que la velocidad sea constante indica que es un caso de Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU), por lo que al trazar la gráfica de velocidad-tiempo del cuerpo, se obtiene la siguiente figura.



Si se considera la fórmula que se utiliza en el MRU:

$$v = \frac{d}{t}$$

La distancia recorrida se obtiene de multiplicar la velocidad por el tiempo recorrido.

$$d = v\,t$$

Esto es:

$$\begin{aligned} d &= (3\,m/s)(6s) \\ &= 18\,m \end{aligned}$$

La cual coincide con el área del rectángulo coloreado, en éste caso se puede realizar la multiplicación directa de la base por la altura o bien, calcularlo mediante la integral definida, como se muestra a continuación:

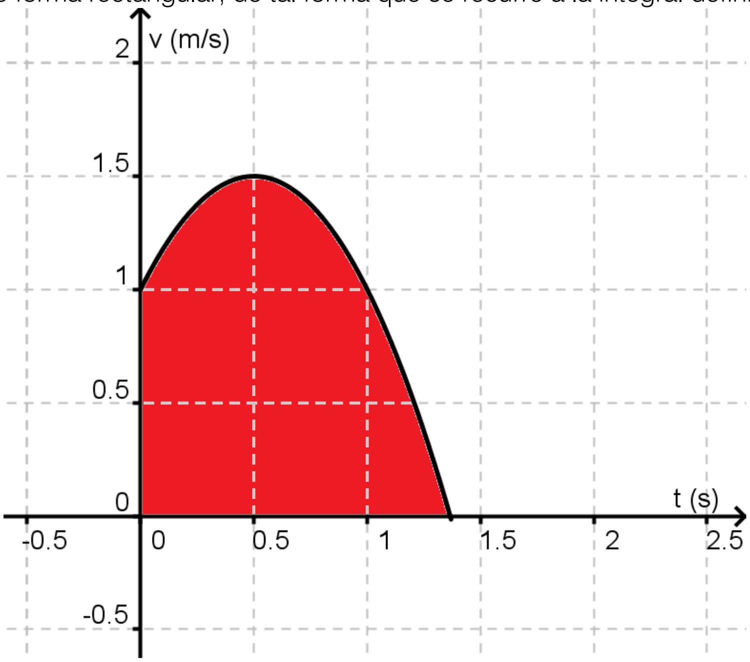
$$\int_0^6 3\,dx = 3x\Big|_0^6 = [3(6)] - [3(0)] = 18$$

Con esto se concluye que tanto el área bajo la línea que describe la velocidad (función), la fórmula y la integral definida confluyen en el mismo resultado el cual es: que la distancia recorrida por el cuerpo es 18 m/s.

Ejemplo 6.
Calcular el espacio recorrido por un cuerpo con movimiento rectilíneo y cuya velocidad la describe la función:

$$v(t) = -2t^2 + 2t + 1$$

En este caso se observa la gráfica de la función que describe la velocidad del cuerpo, y se percibe la dificultad de obtener el valor del área de forma rectangular, de tal forma que se recurre a la integral definida.



Para utilizar la integral definida es necesario definir sus límites, en este caso es a partir de 0 segundos y se tendría que obtener el instante donde la velocidad es 0 m/s, la cual se visualiza en la gráfica, en el corte que tiene la función con el eje horizontal.

Al hacer la velocidad 0 m/s se obtiene una ecuación cuadrática que se puede resolver mediante la fórmula general, como se muestra a continuación.

$$v(t) = -2t^2 + 2t + 1$$
$$0 = -2t^2 + 2t + 1$$

La fórmula general queda:

$a = -2$
$b = 2$
$c = 1$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(-2)(1)}}{2(-2)}$$
$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{-4}$$
$$t = \frac{-2 + \sqrt{12}}{-4} \qquad t = \frac{-2 - \sqrt{12}}{-4}$$
$$t = -0.37 \qquad t = 1.37$$

El tiempo a considerar como límite superior de la integral es t=1.37 s, dado que es el resultado positivo en la solución de la ecuación cuadrática, por lo tanto la integral definida a resolver es:

$$\int_0^{1.37}\left(-2t^2+2t+1\right)dt=\frac{-2t^3}{3}+t^2+t\Big|_0^{1.37}=\left[\frac{-2(1.37)^3}{3}+(1.37)^2+1.37\right]-\left[\frac{-2(0)^3}{3}+(0)^2+(0)\right]=1.53$$

Con este resultado se puede concluir que el espacio recorrido es de 1.53 m.

■ Cierre

Actividad: 6

En equipo resuelvan los siguientes problemas.

1. Se supone que durante los primeros cinco años que un producto se puso a la venta en el mercado la función f(x) describe la razón de venta cuando pasaron "x" número de años desde que el producto se presentó en el mercado por primera vez.

   Se sabe que $f(x)=2700\sqrt{x}+900$ si $0\le x\le 5$. Calcula las ventas totales durante los primeros cuatro años.

2. Se espera que la compra de una nueva máquina genere un ahorro en los costos de operación. Cuando la máquina tenga "x" número de años de uso, la razón de ahorro sea de f(x) pesos al año donde $f(x)=1000+5000x$

   a) ¿Cuánto se ahorrará en costos de operación durante los primeros seis años?

   b) Si la máquina se compró a $67,500, ¿cuánto tiempo tardará la máquina en pagarse por sí sola?

3. Un móvil lleva una velocidad en m/s, en función del tiempo, según la función:

   $v(t)=2t+1$

   Donte "t" se mide en segundos. Calcula el espacio que recorre el móvil entre los segundos 2 y 5 del movimiento.

Actividad: 6 (continuación)

4. La función que mide el caudal que sale de un depósito es:

$$f(x) = 10 - x$$

Donde f(x) está dado en litros por segundo y “x” en segundos.

5. Una moto cuando arranca lleva un movimiento uniformemente acelerado, en el que la aceleración es de 2 m/s^2.
   a) Calcula la velocidad al cabo de 30 segundos.

   b) Calcula el espacio que habrá recorrido en esos 30 segundos.

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 6</td><td colspan="3">Producto: Problemas de aplicación.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><td colspan="6">Saberes</td></tr>
<tr><td>Conceptual</td><td colspan="3">Procedimental</td><td colspan="2">Actitudinal</td></tr>
<tr><td>Expresa la integral definida que describen problemas cotidianos.</td><td colspan="3">Utiliza la integral definida para resolver problemas cotidianos.</td><td colspan="2">Aprecia la utilidad de la integral definida en la solución de múltiples situaciones.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Secuencia didáctica 2.
Aplicaciones de la integral definida en Economía.

Inicio

Actividad: 1

Resuelve lo que se solicita.

1. Dibuja el área de la región plana limitada por la recta $y = 3 - 2x$ y la parábola $y = 2x - x^2$.

2. Dada la función $y = x^3 - 4x$, calcular:

a) Las raíces de la función.

b) La gráfica de la función.

c) El área de la región plana limitada por la gráfica de la función y el eje X.

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 1</td><td colspan="3">Producto: Gráficas.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Identifica la región delimitada por funciones.</td><td colspan="3">Obtiene los límites del área delimitada por funciones.</td><td colspan="2">Muestra interés para realizar la actividad.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Desarrollo

Ganancia de productores y consumidores.

La integral definida también se utiliza en la Administración y Economía para hacer modelos de situaciones de mercado, en el estudio de las funciones de oferta y demanda.

Función de oferta: Una empresa que fabrica y vende un determinado producto utiliza esta función para relacionar la cantidad de productos que está dispuesta a ofrecer en el mercado con el precio unitario al que se puede vender esa cantidad.

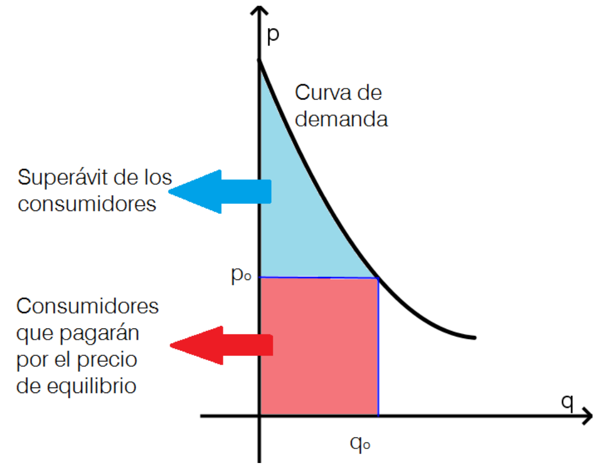
Se puede decir que en respuesta a distintos precios, existe una cantidad correspondiente de productos que los fabricantes están dispuestos a ofrecer en el mercado en algún período específico. Cuanto mayor es el precio, mayor será la cantidad de productos que la empresa está dispuesta a ofrecer. Al reducirse el precio, se reduce la cantidad ofrecida; esto permite asegurar que la función de oferta es una función creciente.

Función de demanda: La empresa utiliza esta función para relacionar la cantidad de productos demandada por los consumidores, con el precio unitario al que se puede vender esa cantidad, de acuerdo con la demanda.

En general, si el precio aumenta, se produce una disminución de la cantidad demandada del artículo porque no todos los consumidores están dispuestos a pagar un precio mayor por adquirirlo. La demanda disminuye al aumentar el precio por eso esta función es una función decreciente.

Superávit de consumidores y productores.
El mercado determina el precio al que un producto se vende. El punto de intersección de la curva de la demanda y de la curva de la oferta para cada producto da el precio de equilibrio. En el precio de equilibrio, los consumidores comprarán la misma cantidad de producto que los fabricantes quieren vender. Sin embargo, algunos consumidores aceptarán gastar más en un artículo que el precio de equilibrio. El total de las diferencias entre el precio de equilibrio del artículo y los mayores precios que todas las personas aceptan pagar se considera como un ahorro de esas personas y se llama superávit de los consumidores.

El área entre la curva que describe la función demanda d(q) y la recta $p=p_o$ es el superávit de los consumidores y el área delimitada por debajo de la recta $p=p_o$ y la función demanda, es la cantidad de consumidores que gastarán en el precio de equilibrio, como se muestra en la siguiente gráfica.



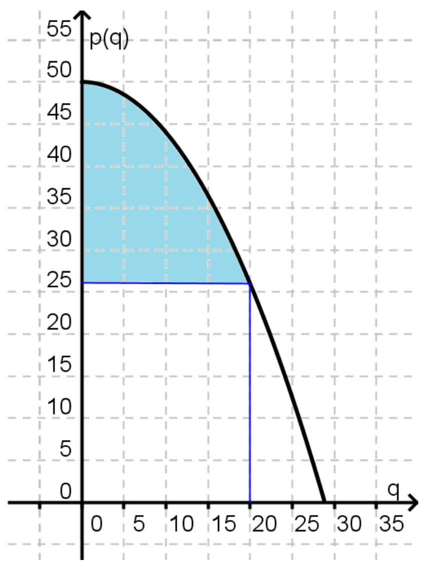
Entonces el valor del superávit de los consumidores está dado por la integral definida de esta forma:

$$\int_0^{q_0} [p(q) - p_0]\,dq$$

Donde p(q) es una función demanda con precio de equilibrio p_o y demanda de equilibrio q_o.

Ejemplo 1.
Encontrar el superávit o ganancia de los consumidores si el nivel de venta asciende a 20 unidades y la curva de demanda está dada por $p(q) = 50 - 0.06q^2$.

Se tiene que el superávit está representado por el área que se visualiza en la gráfica de la función.



Como la cantidad de unidades es 20, es decir, $q_o = 20$, su precio asciende a:

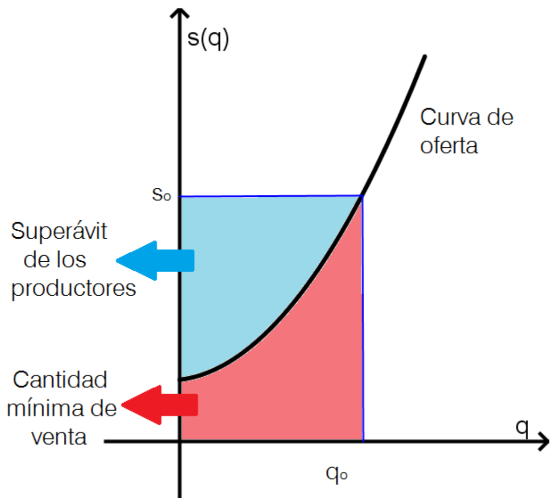
$$p(20) = 50 - 0.06(20)^2 = 26$$

Resolviendo la integral, la ganancia de los consumidores resulta:

$$\int_0^{20} \left(50 - 0.06q^2 - 26\right) dq = \int_0^{20} \left(24 - 0.06q^2\right) dq = 24x - \frac{0.06q^3}{3}\Big|_0^{20} = \left[24(20) - 0.02(20)^3\right] - \left[24(0) - 0.02(0)^3\right] = 320$$

La ganancia de los consumidores asciende a $320 si el nivel de venta asciende a veinte unidades.

De la misma manera, si algunos fabricantes estuviesen dispuestos a proporcionar un producto a un menor precio que el precio de equilibrio, el total de las diferencias entre el precio de equilibrio y los precios más bajos a los que los fabricantes venderían el producto se considera como una entrada adicional para los fabricantes y se llama el superávit de los productores, como lo muestra la gráfica que a continuación se muestra.



El área total bajo la curva de oferta entre $q=0$ y $q=q_o$ es la cantidad mínima total que los fabricantes están dispuestos a obtener por la venta de q_o artículos. El área bajo la recta $s=s_o$ es la cantidad realmente obtenida. La diferencia entre estas dos áreas es el superávit de los productores, también está dada por la integral definida.

Si $S(q)$ es una función de oferta con precio S_o de equilibrio y oferta q_o de equilibrio, entonces el superávit de los productores está dado por:

$$\int_0^{q_0} [s_o - s(q)]dq$$

Ejemplo 2.
Encontrar la ganancia de los productores si la producción asciende a diez artículos y la curva de la oferta para un producto está dada por $S(q)=\frac{q}{2}+7$.
Si la producción asciende a 10 artículos, el precio es:

$$S(10)=\frac{10}{2}+7=12$$

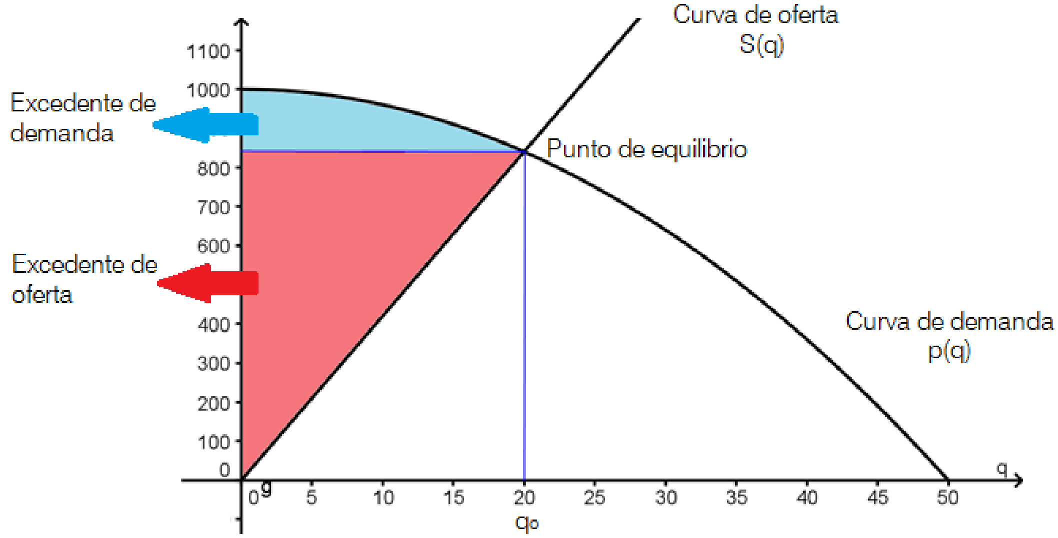
La ganancia o el superávit de los productores se calcula resolviendo la siguiente integral definida.

$$\int_0^{10}\left[12-\left(\frac{q}{2}+7\right)\right]dq=\int_0^{10}\left[5-\frac{q}{2}\right]dq=5q-\frac{q^2}{4}\bigg|_0^{10}=\left[5(10)-\frac{(10)^2}{4}\right]-\left[5(0)-\frac{(0)^2}{4}\right]=25$$

La ganancia de los productores asciende a $25, si la producción es de diez artículos.

Ejemplo 3.
Calcular el exceso de oferta y el exceso de demanda para las curvas de demanda y ofertas dadas, si la función de demanda está dada por $p(q)=1000-0.4q^2$ y la función de oferta es $S(q)=42q$.

El exceso de oferta y el de demanda están representados por las áreas que muestra la gráfica.



La oferta coincide con la demanda en el punto de equilibrio, es decir, cuando $S(q) = p(q)$.

Para encontrar dicho punto, primero se requiere resolver la ecuación cuadrática:

$$1000 - 0.4q^2 = 42q$$
$$-0.4q^2 - 42q + 1000 = 0$$

Resolviendo mediante la fórmula general, se tiene:

$a = -0.4$
$b = -42$
$c = 1000$

$$q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$q = \frac{-(-42) \pm \sqrt{(-42)^2 - 4(-0.4)(1000)}}{2(-0.4)}$$
$$q = \frac{42 \pm \sqrt{3364}}{-0.8} = \frac{42 \pm 58}{-0.8}$$

$$q = \frac{42 + 58}{-0.8} \qquad q = \frac{42 - 58}{-0.8}$$
$$q = -125 \qquad q = 20$$

Finalmente se sustituye q=20, el cual es el valor positivo de los resultados obtenidos, en cualquiera de las funciones, en este caso se elegirá la función de oferta, dada la facilidad de la sustitución.

$$S(q) = 42q$$
$$S(20) = 42(20) = 840$$

El punto de equilibrio obtenido es (20, 840), es decir, si se producen 20 artículos el precio de equilibrio es de $840.

El excedente de demanda o superávit de los consumidores se obtiene al resolver la siguiente integral definida:

$$\int_0^{20}\left[1000-0.4q^2-840\right]dq=\int_0^{20}\left[160-0.4q^2\right]dq=160q-\frac{0.4q^3}{3}\Bigg|_0^{20}=\left[160(20)-\frac{0.4(20)^3}{3}\right]-\left[160(0)-\frac{0.4(0)^3}{3}\right]=2133.33$$

El excedente de demanda asciende a \$2133.33.

El excedente de oferta se obtiene al resolver la siguiente integral definida:

$$\int_0^{20}\left[840-42q\right]dq=840\,q-\frac{42q^2}{2}\Bigg|_0^{20}=\left[840(20)-21(20)^2\right]-\left[840(0)-21(0)^2\right]=8400$$

El superávit de oferta alcanza \$8400.

Actividad: 2

En equipo, realiza una investigación sobre costo, ingreso y utilidad marginal y cómo se aplica la integral definida en la economía. Posteriormente, analiza y escribe 3 ejemplos que cumplan con lo siguiente:

1. Ser claros.
2. Tener un nivel de complejidad adecuado, para comentarlo con tus compañeros.
3. Mostrar la bibliografía o sitio web que se haya consultado.

Actividad: 2 (continuación)

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 2</td><td colspan="3">Producto: Ejemplos.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Reconoce los términos de análisis marginal en problemas cotidianos.</td><td colspan="3">Ejemplifica la integral definida aplicada al análisis marginal.</td><td colspan="2">Reporta una investigación clara y de acuerdo a las especificaciones dadas.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Sitios Web recomendados:

Ingresa a las siguientes ligas, para que refuerces tu aprendizaje.

http://www.xtec.cat/~jlagares/integral.esp/integral.htm#E1
http://www.mat.uson.mx/eduardo/calculo2/.
http://www.zweigmedia.com/MundoReal/Calcsumm6.html
http://integrandoconpaco5.blogspot.com/

■ Cierre

Actividad: 3

En equipo resuelvan los siguientes problemas.

1. Una función de costo marginal está definida por $c'(x) = 3x^2 + 8x + 4$ y el costo fijo es de \$6. Determina la función costo total correspondiente.

2. Se espera que la compra de una nueva máquina genere un ahorro en los costos de operación. Cuando la máquina tenga "x" número de años de uso, la razón de ahorro será de f(x) pesos al año donde $f(x) = 1000 + 5000x$.
   a) ¿Cuánto se ahorra en costos de operación durante los primeros seis años?
   b) Si la máquina se compró \$67500, ¿cuánto tiempo tardará la máquina en pagarse por sí sola?

3. Una fábrica produce objetos de decoración. La función de ingreso marginal está dada por:

$$i(x) = 5 + \frac{3}{x+2}$$

Donde "x" es el número de objetos vendidos e i(x) está expresado en dólares. ¿Cuál es el incremento de los ingresos obtenidos cuando se pasa de vender 100 a vender 200 objetos?

Actividad: 3 (continuación)

4. Sea la función de demanda $p(q) = 200 - 4q$ y la función de oferta $s(q) = 100 + q$, calcula la ganancia del consumidor y del productor.

5. La función de demanda de un producto es $p(q) = 1200 - 0.2q - 0.0001q^2$. Calcula la ganancia del consumidor cuando el nivel de ventas es de 500.

6. Si las funciones de demanda y oferta están definidas por $p(q) = 10 - q$ y $s(q) = q + 5$. Calcular los excedentes de consumidores y de productores para un equilibrio de mercado.

<table>
<tr><th colspan="7">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 3</td><td colspan="4">Producto: Problemas de aplicación.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="7">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="4">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Identifica la integral definida en problemas aplicados a la economía.</td><td colspan="4">Emplea la integral definida para resolver problemas de economía.</td><td colspan="2">Aprecia la utilidad de la integral definida en la solución de problemas de economía.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td colspan="2" rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

DERIVADA INSENSIBLE

Fui la función aquella
en cuya derivada te encontrabas tú,
y fue un factor constante, el causante
del incremento de tu ingratitud.

Deseaba ser el exponente
que elevara al infinito nuestra relación,
pero ésta fue al menos infinito,
por venganza y por traición.

No sumo ni resto,
simplemente expongo
cuál fue la ecuación
porque en la derivada
que tú hiciste, se llevó a cabo
lo contrario de la integración.

Anónimo

BLOQUE 3

Emplea los métodos de integración.

Competencias disciplinares:

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Unidad de competencia:

- Aplica los métodos de integración (cambio de variable, integración por partes, integración de potencias de funciones trigonométricas y fracciones parciales) a diferentes tipos de funciones, mostrando una actitud analítica, reflexiva y de cooperación.

Atributos a desarrollar en el bloque:

4.1. Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
5.4. Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
5.6. Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
6.1. Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.
7.1. Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.
8.1. Propone maneras de solucionar un problema y desarrolla un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
8.2. Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
8.3. Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Tiempo asignado: 14 horas

Secuencia didáctica 1.
Método de cambio de variable y método de integración por partes.

Inicio

Actividad: 1

Derivar las siguientes funciones:

1. $f(x) = 9(2-4x)^{12}$

2. $f(x) = (3x^3 - 5x)^4$

3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4 - x^2 + 5}}$

4. $f(x) = \operatorname{sen} x^2$

5. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 1</td><td colspan="3">Producto: Ejercicios.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Reconoce el teorema de derivación que le corresponde a cada función.</td><td colspan="3">Aplica los teoremas de derivación y la regla de la cadena, para derivar diferentes funciones.</td><td colspan="2">Se muestra dispuesto a realizar la actividad.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Desarrollo

En esta secuencia estudiarás los métodos de integración de funciones compuestas, las cuales no se puedan integrar mediante los teoremas básicos que se abordaron en el bloque anterior. Ahora deberás elegir de entre varios métodos, el más adecuado para resolver las integrales que se te planteen.

En cada uno de los métodos de integración, se presentan ejemplos que van desde los casos más sencillos, pero ilustrativos, que permiten llegar de manera gradual hasta los que tienen mayor grado de dificultad.

El principal objetivo de los métodos de integración, consiste en reducir la integral original a una integral más sencilla y fácil de obtener.

Es indispensable que para que aprendas los métodos de integración te apoyes en tus conocimientos de Álgebra, Trigonometría y Cálculo Diferencial. Ubica los Materiales de Apoyo en la plataforma del Colegio para que puedas reforzar tus conocimientos previos.

Integración por cambio de variable o regla de sustitución.

Hasta ahora las integrales se han resuelto de forma directa, sin embargo no siempre es así, por ejemplo, cómo integrar la siguiente función:

$$\int 5x(2x^2+1)^3 dx$$

Para ello primero se analizará el cambio de variable que se hacía al derivar una función compuesta, debido a que el proceso inverso de la integración es la derivación y viceversa.

Imagínate la función $F(x)$ que tienes que derivar para obtener como resultado: $f(x)=5x(2x^2+1)^3$

Suponiendo que se conoce la función F(x), una forma de comprobar que realmente ésta es el resultado de la integral, sería derivarla.

Si, $F(x)=\frac{5}{16}\left(2x^2+1\right)^4$, demostrar que su derivada es igual a $f(x)=5x(2x^2+1)^3$.

Esto se llevará a cabo mediante la utilización de la regla de la cadena, para lo que se requiere de un cambio de variable, con el fin de que la función resulte más sencilla. El cambio de variable puede ser el siguiente:

Si $u=2x^2+1$, entonces, $F(x)=\frac{5}{16}u^4$.

Por lo tanto, $F'(x)=(4)\left(\frac{5}{16}u^{4-1}\right)u'=\frac{5}{4}u^3u'$

Además, $u'=4x$ y sustituyendo se tiene:

$$F'(x)=\frac{5}{4}u^3u'=\frac{5}{4}\left(2x^2+1\right)^3(4x)$$
$$F'(x)=5x\left(2x^2+1\right)^3$$

Efectivamente, $F'(x)=f(x)$.

Por lo tanto se puede decir que $\int 5x(2x^2+1)^3dx = \frac{5}{16}(2x^2+1)^4 + \text{cte.}$

Pero esto fue sencillo porque ya se conocía el resultado y sólo se comprobó utilizando derivación.

Ahora bien, se puede utilizar de forma análoga el cambio de variable, para utilizar los teoremas básicos de la integración. A continuación se mostrará cómo se realiza el cambio de variable para integrar la función anterior.

$$\int 5x(2x^2+1)^3dx$$

Si $u = 2x^2+1$, entonces queda:

$$\int 5x(2x^2+1)^3dx = \int 5x(u)^3dx$$

El propósito es tener la integral solamente en términos de “u”.

Para ello se calcula el diferencial de “u”.

$$u = 2x^2+1$$
$$du = 4xdx$$

Si se acomoda la integral de la siguiente forma:

$$\int 5x(2x^2+1)^3dx = \int (u)^3 5xdx$$

Se nota que “du” no corresponde, debido a que debe ser 4xdx.

Para resolver este problema, se despeja “dx” del diferencial “du”, como se muestra:

$$du = 4xdx$$
$$\frac{du}{4x} = dx$$

Ahora se sustituye “dx” en la integral y se simplifican términos.

$$\begin{aligned}\int 5x(2x^2+1)^3dx &= \int (u)^3 5xdx\\ &= \int (u)^3 5x\frac{du}{4x}\\ &= \int (u)^3 \frac{5}{4}du\\ &= \frac{5}{4}\int (u)^3du\end{aligned}$$

Como se ve en el resultado anterior, la integral se resuelve con el segundo teorema básico de integración, y queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\int 5x(2x^2+1)^3dx = \frac{5}{4}\int (u)^3du &= \frac{5}{4}\frac{u^4}{4} + \text{cte.}\\ &= \frac{5}{16}u^4 + \text{cte.}\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de "u", se obtiene:

$$\int 5x(2x^2+1)^3 dx = \frac{5}{16}\left(2x^2+1\right)^4 + cte.$$

Formalizando el método de cambio de variable para integrar una función, se tiene:

Sea $\int f[g(x)]\, g'(x)\, dx$, si se toma a:

$$u = g(x) \qquad \text{entonces} \qquad du = g'(x)\, dx$$

Sustituyendo este cambio de variable en la integral original se obtiene:

$$\int f(u)\, du, \text{ donde } u = g(x) \text{ y } du = g'(x)$$

Como puedes observar, la integral original era la de una función composición, es decir, la de una función "f" que dependía de otra función "g", al hacer el cambio de variable, la integral se transforma en otra función que depende ahora de una sola variable y no de una función, lo que permitirá (de ser posible) calcular la integral más fácilmente.

El método de cambio de variable o sustitución, no indica qué parte de la función a integrar se debe cambiar por "u", se requiere de habilidad para seleccionar dicho cambio, la cual adquirirás a medida de que practiques este método.

A continuación se presentan algunos ejemplos de integración utilizando el método de cambio de variable.

Ejemplo 1.
Calcular $\int (1+2x)^4 (2)dx$

Al observar la función que se desea integrar, nota que hay una función elevada a una potencia, la cual se conoce como una función compuesta, es por ello que se elige como "u" la función que está siendo elevada, como se muestra:

$u = 1+2x$
También se ocupa obtener la diferencial de "u", de la siguiente forma.

$du = 2dx$

De tal manera que al observar la función se tiene que se encuentra el diferencial completo, quedando la sustitución de la siguiente forma:

$$\int (1+2x)^4 (2)dx = \int u^4 du$$

Ahora que se simplificó la integral, se puede resolver de forma directa, utilizando los teoremas enunciados en el bloque 1.

$$\int (1+2x)^4 (2)dx = \int u^4 du = \frac{u^5}{5} + cte.$$

Una vez resuelta la integral, se vuelve a sustituir el valor de "u", para obtener el resultado en términos de "x".

$$\int (1+2x)^4 (2)dx = \frac{(1+2x)^5}{5} + cte.$$

Ejemplo 2.

Calcular $\int \sqrt{9-x^2}\,(-2x)dx$.

En este caso se expresa el radical como potencia, con el propósito de visualizar el cambio de variable y de utilizar la integración directa.

$$\int \sqrt{9-x^2}\,(-2x)dx = \int (9-x^2)^{\frac{1}{2}}(-2x)dx$$

De esta forma se nota que la función que está elevada a una potencia es $9-x^2$, es por ello que:

$$u = 9-x^2,\ \text{además,}\ du = -2xdx$$

En este caso también se tiene la diferencial completa, así que se procede a realizar el cambio de variable.

$$\int \sqrt{9-x^2}\,(-2x)dx = \int (9-x^2)^{\frac{1}{2}}(-2x)dx = \int u^{\frac{1}{2}}du$$

Ahora se procede a integrar de forma directa.

$$\int \sqrt{9-x^2}\,(-2x)dx = \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \text{cte.}$$

$$= \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \text{cte.}$$

Sustituyendo el valor de “u”, se obtiene el resultado que posteriormente se expresa en forma de radical.

$$\int \sqrt{9-x^2}\,(-2x)dx = \frac{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \text{cte.}$$

$$= \frac{2(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + \text{cte.}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(9-x^2)^3} + \text{cte.}$$

Ejemplo 3.

Calcular $\int x^3(x^4+3)^2dx$.

Se elige el cambio de variable y se obtiene la diferencial.

$u = x^4 + 3$

$du = 4x^3dx$

Al observar la función a integrar, se tiene que la diferencial está incompleta y para resolver este problema, se despeja “dx” de la diferencial de “u”.

$du = 4x^3dx$

$\frac{du}{4x^3} = dx$

Se sustituye “u” y “dx” en la integral, como se muestra a continuación:

$$\int x^3(x^4+3)^2dx = \int x^3u^2\frac{du}{4x^3}$$

Se procede a realizar la simplificación de términos. Si el método está bien empleado, se deben cancelar todas las variables “x”, teniéndose así la integral sólo en términos de “u”.

$$\int x^3(x^4+3)^2dx=\int \cancel{x^3}u^2\frac{du}{4\cancel{x^3}}$$

$$\int x^3(x^4+3)^2dx=\int u^2\frac{du}{4}=\frac{1}{4}\int u^2du$$

Una vez extraído el coeficiente fuera de la integral, se procede a realizar la integración directa.

$$\int x^3(x^4+3)^2dx=\frac{1}{4}\int u^2du=\frac{1}{4}\frac{u^3}{3}+\text{cte.}$$
$$=\frac{1}{12}u^3+\text{cte.}$$
$$=\frac{1}{12}\left(x^4+3\right)^3+\text{cte.}$$

Ejemplo 4

Calcular $\int\frac{x}{(1-x^2)^3}dx$.

Es conveniente que la potencia que está en el denominador, se pase al denominador. Recuerda que cuando se realiza este procedimiento la potencia se cambia de signo.

$$\int\frac{x}{(1-x^2)^3}dx=\int(1-x^2)^{-3}\left(x\,dx\right)$$

Se elige el cambio de variable y se obtiene la diferencial.

$u=1-x^2$
$du=-2xdx$

Como el diferencial de la función está incompleto, se despeja “dx” de la diferencial de “u”, quedando:

$$\frac{du}{-2x}=dx$$

$$\int\frac{x}{(1-x^2)^3}dx=\int(1-x^2)^{-3}\left(x\,dx\right)=\int u^{-3}\left(\cancel{x}\frac{du}{-2\cancel{x}}\right)=\frac{1}{-2}\int u^{-3}du$$

Ahora se integra de forma directa.

$$\int\frac{x}{(1-x^2)^3}dx=\frac{1}{-2}\int u^{-3}du=\frac{1}{-2}\cdot\frac{u^{-3+1}}{-3+1}+\text{cte.}$$
$$=\frac{1}{-2}\cdot\frac{u^{-2}}{-2}+\text{cte.}$$
$$=\frac{1}{4u^2}+\text{cte.}$$
$$=\frac{1}{4\left(1-x^2\right)^2}+\text{cte.}$$

Ejemplo 5.

Calcular $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Aquí se tienen que hacer dos movimientos previos, primero expresar la raíz como potencia y posteriormente subirla al numerador.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}dx = \int x\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx$$

Se elige el cambio de variable y se obtiene la diferencial.

$u = 1-x^2$

$du = -2xdx$

Como el diferencial de la función está incompleto, se despeja "dx" de la diferencial de "u", quedando:

$$\frac{du}{-2x} = dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \cancel{x}u^{-\frac{1}{2}}\frac{du}{-2\cancel{x}} = \frac{1}{-2}\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

Integrando se obtiene:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{-2}\int u^{-\frac{1}{2}}du &= \frac{1}{-2}\cdot\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+\text{cte.}\\ &= \frac{1}{-2}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+\text{cte.}\\ &= -1\cdot u^{\frac{1}{2}}+\text{cte.}\\ &= -\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}+\text{cte.}\\ &= -\sqrt{1-x^2}+\text{cte.}\end{aligned}$$

Ejemplo 6.

Calcular $\int \frac{\operatorname{sen}x}{\cos^3 x}dx$.

Es recomendable visualizar la función de la siguiente forma:

$$\int \frac{\operatorname{sen}x}{\cos^3 x}dx = \int \frac{\operatorname{sen}x}{(\cos x)^3}dx = \int \operatorname{sen}x(\cos x)^{-3}dx$$

Se elige el cambio de variable y se obtiene la diferencial.

$u = \cos x$

$du = -\operatorname{sen}x\,dx$

Como el diferencial de la función está incompleto, se despeja "dx" de la diferencial de "u", quedando:

$$\frac{du}{-\operatorname{sen}x} = dx$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}x}{\cos^3 x}dx = \int (\cancel{\operatorname{sen}x})u^{-3}\,\frac{du}{-\cancel{\operatorname{sen}x}} = -\int u^{-3}du$$

Integrando queda:

$$\int \frac{\operatorname{sen}x}{\cos^3 x}dx = -\int u^{-3}du = -\frac{u^{-2}}{-2} + \text{cte.}$$

$$= \frac{-(\cos x)^{-2}}{-2} + \text{cte.}$$

$$= \frac{1}{2(\cos x)^2} + \text{cte.}$$

$$= \frac{1}{2\cos^2 x} + \text{cte.}$$

El resultado anterior se puede expresar de la siguiente forma, utilizando la identidad trigonométrica recíproca $\sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

$$\int \frac{\operatorname{sen}x}{\cos^3 x}dx = \frac{1}{2}\sec^2 x + \text{cte.}$$

Actividad: 2

Calcula las siguientes integrales, utilizando el método de cambio de variable, posteriormente, ingresa a la página:
http://es.solvemymath.com/calculadoras/calculo/integrales/index.php
para que verifiques tus resultados, también puedes utilizar el programa Derive.

1. $\int (3x+5)^7\,dx$

2. $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

3. $\int \operatorname{sen}^2 3x \cos 3x\,dx$

Actividad: 2 (continuación)

4. $\int \frac{3x^2 - 2x + 4}{(4x^3 - 4x^2 + 16x)^2} dx$

5. $\int 12t^2 \sec^2\left(4t^3 + 1\right) dt$

6. $\int x^2 \sqrt[4]{(x^3 + 1)^3}\, dx$

7. $\int (s + 1) e^{s^2 + 2s + 6} ds$

Actividad: 2 (continuación)

8. $\int (10x + 25)\, e^{x^2 + 5x + 1}\, dx$

9. $\int (2x^4 - 5)(4x^5 - 10x)^7\, dx$

10. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx$

Evaluación						
Actividad: 2	Producto: Ejercicios.			Puntaje:		
Saberes						
Conceptual	Procedimental			Actitudinal		
Identifica el cambio de variable a utilizar en la integración de diferentes funciones.	Aplica el método de cambio de variable para integrar varias funciones.			Expresa sus dudas y corrige sus errores.		
Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente		

Integración por partes.

Este método se utiliza para integrar aquellas funciones que están formadas por el producto de dos funciones, como las siguientes, algunos ejemplos de ellas son:

$$\int x \ln x dx, \qquad \int x^2 e^x dx \qquad \int e^x \operatorname{sen} x dx ,$$

El teorema de integración por partes se obtiene de la fórmula de la derivada del producto de dos funciones, como se muestra a continuación.

$$[uv]' = uv' + vu'$$

Expresándola en términos de las diferenciales queda:

$$d[uv] = udv + vdu$$

Donde u=u(x) y v=v(x), funciones diferenciables de "x".

Si u' y v' son funciones continuas, se puede integrar ambos miembros de la ecuación, como se muestra:

$$\int d[uv] = \int udv + vdu$$
$$\int d[uv] = \int udv + \int vdu$$

Al realizar la integral, en el primer miembro de ecuación se elimina la integral con la derivada, al ser éstas operaciones inversas.

$$uv = \int udv + \int vdu$$

Al despejar $\int udv$, se obtiene la fórmula de integración por partes

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Como se observa, la integral original, $\int udv$, depende otra integral, $\int vdu$, la cual debe ser sencilla de integrar.

Como la función está compuesta por una multiplicación de dos funciones, el método consiste en designar "u" y "dv" a cada una de ellas.

Para la elección de "u" y "dv" se recomienda lo siguiente:

1. "u" debe ser una función sencilla de derivar.
2. "dv" debe ser una función fácil de integrar.
3. $\int vdu$ debe ser más sencilla que $\int udv$.
4. Para elegir "u", se recomienda escoger de la siguiente lista de funciones en orden de facilidad, la primera que aparezca.

   Logarítmica
   Algebraica
   Trigonométrica
   Exponencial

   Es decir, se elige como "u" a la función Logarítmica antes que la función Algebraica, Trigonométrica o Exponencial. Si no posee función Logarítmica, se elige como "u" a la función Algebraica antes que la función Trigonométrica o Exponencial, y así sucesivamente.

   Una forma sencilla de recordar el orden para seleccionar "u" es con la palabra LATE, que está compuesta por la primer letra de las funciones de la lista.

A continuación se muestran algunos ejemplos en los que se utiliza el método de integración por partes.

Ejemplo 1.
Calcular $\int xe^{-2x}dx$

Como se observa, el integrando está compuesto por la multiplicación de dos funciones: x , e^{-2x} .

Siguiendo las recomendaciones, se elige a la función algebraica como “u” y a la función exponencial le correspondería “dv”.

$u = x$

$dv = e^{-2x}dx$

Para aplicar la fórmula de integración por partes, se deben conocer cada una de los componentes de la fórmula, “u”, “dv”, “v” y “du.

$$\int xe^{-2x}dx = uv - \int vdu$$

Para conocer “du” se requiere calcular la diferencial de “u” y para conocer “v”, se necesita integrar “dv”, como se muestra a continuación.

$u = x$ $\qquad$ $dv = e^{-2x}dx$

$du = 1dx$ $\qquad$ $v = \int dv = \int e^{-2x}dx$

$v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

Una vez que se conoce cada uno de los elementos de la fórmula para integrar por partes, enseguida se sustituye y se realizan los procedimientos correspondientes.

$$\int xe^{-2x}dx = uv - \int vdu$$

$$= (x)\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \int -\frac{1}{2}e^{-2x}dx \qquad \text{(A)}$$

El proceso para resolver la integral se facilita, debido a que esa integral es más sencilla, sólo que el diferencial no está completo; se podría hacer un cambio de variable, pero tendría que utilizarse una letra diferente a la “u”, para evitar confusiones. La recomendación es utilizar la letra “w”.

$\int -\frac{1}{2}e^{-2x}dx$

$w = -2x$

$dw = -2dx$

$\frac{dw}{-2} = dx$ $\qquad$ $\int -\frac{1}{2}e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}\int e^{w}\frac{dw}{-2} = \frac{1}{4}\int e^{w}dw$

Utilizando el teorema de integración directa correspondiente a la función exponencial, queda:

$$\int -\frac{1}{2}e^{-2x}dx = \frac{1}{4}\int e^{w}dw = \frac{1}{4}e^{w} + \text{cte.}$$

$$= \frac{1}{4}e^{-2x} + \text{cte.} \qquad \text{(B)}$$

Se sustituye el resultado (B) en (A), se resuelve la integral solicitada.

$$\int xe^{-2x}dx = uv - \int vdu$$

$$= (x)\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \int -\frac{1}{2}e^{-2x}dx$$

$$= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \text{cte.}$$

Es recomendable simplificar el resultado, para ello, se requiere factorización por factor común y operaciones algebraicas, como sigue:

$$\int xe^{-2x}dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \text{cte.}$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right]e^{-2x} + \text{cte.}$$

$$= \left[\frac{-2x-1}{4}\right]e^{-2x} + \text{cte.}$$

$$= -\frac{(2x+1)e^{-2x}}{4} + \text{cte.}$$

Ejemplo 2.

Calcular $\int t\,\text{Ln}(t)\,dt$

El integrando está compuesto por la multiplicación de las funciones: t y Ln(t).

Tomando en cuenta las recomendaciones se toma a:

$u = \text{Ln}(t)$

$dv = t\,dt$

Una vez seleccionados “u” y “dv”, se obtienen lo siguiente:

$$u = \text{Ln}(t) \qquad dv = t\,dt$$

$$du = \frac{dt}{t} \qquad v = \int dv = \int t\,dt$$

$$v = \frac{t^2}{2}$$

Al sustituir los resultados anteriores en la fórmula de integración por partes, se obtiene:

$$\begin{aligned}\int t\,\mathrm{Ln}(t)dt &= uv - \int vdu\\ &= \mathrm{Ln}(t)\left(\frac{t^2}{2}\right) - \int \frac{t^2}{2}\left(\frac{dt}{t}\right)\\ &= \mathrm{Ln}(t)\left(\frac{t^2}{2}\right) - \int \frac{t}{2}dt\\ &= \mathrm{Ln}(t)\left(\frac{t^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\int tdt\\ &= \frac{t^2}{2}\mathrm{Ln}(t) - \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}\right) + cte.\\ &= \frac{t^2}{2}\mathrm{Ln}(t) - \frac{t^2}{4} + cte.\end{aligned}$$

Ejemplo 3.
Calcular $\int x^3 \operatorname{sen} x dx$

$$\begin{aligned} u &= x^3 & dv &= \operatorname{sen} x\, dx\\ du &= 3x^2\, dx & v &= \int dv = \int \operatorname{sen} x\, dx\\ & & v &= -\cos x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int x^3 \operatorname{sen} x dx &= uv - \int vdu\\ &= x^3(-\cos x) - \int -\cos x(3x^2dx)\\ &= -x^3\cos x + \int 3x^2 \cos x\, dx \qquad \text{(A)}\end{aligned}$$

Si se observa en el resultado (A), la integral no se obtiene de forma directa, por lo que se tendrá que volver a utilizar el método de integración por partes. Nota que la integral original tenía la función algebraica era de tercer grado, ahora disminuyó un grado, eso significa que después que se integre por segunda vez, se tendrá repetirá el procedimiento una vez más, hasta que quede una función algebraica de primer grado.

$$\int 3x^2 \cos x\, dx$$

$$\begin{aligned} u &= 3x^2 & dv &= \cos x\, dx\\ du &= 6x\, dx & v &= \int dv = \int \cos x\, dx\\ & & v &= \operatorname{sen} x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int 3x^2 \cos x\, dx &= uv - \int vdu\\ &= 3x^2(\operatorname{sen} x) - \int \operatorname{sen} x(6xdx)\\ &= 3x^2 \operatorname{sen} x - \int 6x \operatorname{sen} x\, dx \qquad \text{(B)}\end{aligned}$$

Ahora la integral tiene una función algebraica de primer grado, es por ello que se requiere repetir el procedimiento debido a que no es una integral directa.

$$\int 6x\,\text{sen}\,x\,dx$$

$$\begin{array}{ll} u = 6x & dv = \text{sen}\,x\,dx \\ du = 6dx & v = \int dv = \int \text{sen}\,x\,dx \\ & v = -\cos x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int 6x\,\text{sen}\,x\,dx &= uv - \int v\,du \\ &= 6x(-\cos x) - \int -\cos x(6dx) \\ &= -6x\cos x + 6\int \cos x\,dx \\ &= -6x\cos x + 6\,\text{sen}\,x + \text{cte.} \qquad \text{(C)} \end{aligned}$$

Para obtener el resultado de la integral original se necesita sustituir los resultados, para empezar, se sustituye (C) en (B).

$$\begin{aligned} \int 3x^2\cos x\,dx &= 3x^2\text{sen}\,x - \int 6x\,\text{sen}\,x\,dx \qquad \text{(B)} \\ &= 3x^2\text{sen}\,x - [-6x\cos x + 6\,\text{sen}\,x + \text{cte.}] \\ &= 3x^2\text{sen}\,x + 6x\cos x - 6\,\text{sen}\,x + \text{cte.} \end{aligned}$$

A continuación se sustituye este último resultado en (A), para obtener la solución de la integral original.

$$\begin{aligned} \int x^3\text{sen}\,x\,dx &= -x^3\cos x + \int 3x^2\cos x\,dx \qquad \text{(A)} \\ &= -x^3\cos x + 3x^2\text{sen}\,x + 6x\cos x - 6\,\text{sen}\,x + \text{cte.} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.

Calcular $\int x^3 \text{Ln}x\,dx$

En este caso, la recomendación es tomar a la función logarítmica como “u” y a la función algebraica como “dv”.

$$\begin{array}{ll} u = \text{Ln}x & dv = x^3\,dx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = \int dv = \int x^3\,dx \\ & v = \dfrac{x^4}{4} \end{array}$$

Sustituyendo se obtiene:

$$\begin{aligned} \int x^3\text{Ln}x\,dx &= (\text{Ln}x)\left(\frac{x^4}{4}\right) - \int \frac{x^4}{4}\frac{dx}{x} \\ &= \frac{x^4\text{Ln}x}{4} - \frac{1}{4}\int x^3 dx \\ &= \frac{x^4\text{Ln}x}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{4}\right) + \text{cte.} \\ &= \frac{x^4\text{Ln}x}{4} - \frac{x^4}{16} + \text{cte.} \end{aligned}$$

Ejemplo 5.
Calcular $\int (x^2-1)e^x dx$

$$u = x^2 - 1 \qquad dv = e^x dx$$
$$du = 2x\,dx \qquad v = \int dv = \int e^x dx = e^x$$
$$v = e^x$$

$$\int (x^2-1)e^x dx = uv - \int v\,du = (x^2-1)e^x - \int e^x (2x\,dx) \qquad (A)$$

En el resultado anterior se obtuvo una nueva integral que es necesario resolver por partes, como sigue:

$$\int e^x (2x\,dx)$$

$$u = 2x \qquad dv = e^x dx$$
$$du = 2\,dx \qquad v = \int dv = \int e^x dx$$
$$v = e^x$$

$$\begin{aligned}\int e^x (2x\,dx) &= uv - \int v\,du = (2x)(e^x) - \int e^x (2dx)\\ &= 2xe^x - 2\int e^x dx\\ &= 2xe^x - 2e^x + \text{cte.} \qquad (B)\end{aligned}$$

Se sustituye el resultado (B), en (A).

$$\begin{aligned}\int (x^2-1)e^x dx &= (x^2-1)e^x - \int e^x (2x\,dx) \qquad (A)\\ &= x^2e^x - e^x - [2xe^x - 2e^x + \text{cte}]\\ &= x^2e^x - e^x - 2xe^x + 2e^x + \text{cte}\\ &= x^2e^x - 2xe^x + e^x + \text{cte}\end{aligned}$$

Se puede expresar el resultado simplificado, primero utilizando factorización por factor común y posteriormente expresando el trinomio como un binomio al cuadrado.

$$\begin{aligned}\int (x^2-1)e^x dx &= (x^2 - 2x + 1)\,e^x + \text{cte}\\ &= (x-1)^2 e^x + \text{cte.}\end{aligned}$$

Ejemplo 6.
Calcular $\int e^x \cos x\,dx$.

$$u = e^x \qquad dv = \cos x\,dx$$
$$du = e^x dx \qquad v = \int dv = \int \cos x\,dx$$
$$v = \operatorname{sen} x$$

$$\int e^x \cos x\,dx = uv - \int v\,du = e^x(\operatorname{sen} x) - \int \operatorname{sen} x\,(e^x dx) \qquad (A)$$

Se aplica nuevamente la integración por partes para resolver la última integral.

$$\int e^{x}\operatorname{sen}x\,dx$$

$$u = e^{x} \qquad dv = \operatorname{sen}x\,dx$$

$$du = e^{x}dx \qquad v = \int dv = \int \operatorname{sen}x\,dx$$

$$v = -\cos x$$

$$\begin{aligned}\int e^{x}\operatorname{sen}x\,dx &= uv - \int v\,du = e^{x}(-\cos x) - \int(-\cos x)e^{x}\,dx\\ &= -e^{x}\cos x + \int e^{x}\cos x\,dx \qquad \text{(B)}\end{aligned}$$

Analizando el resultado, se obtienen la integral original, esto significa que se convierte en un proceso cíclico (repetitivo), por lo tanto se procederá a realizar lo siguiente:

1. Se sustituirá el resultado (B) en (A).

2. Se despejará la integral original, para obtener la solución.

A continuación se mostrará este proceso.

$$\begin{aligned}\int e^{x}\cos x\,dx &= uv - \int v\,du = e^{x}(\operatorname{sen}x) - \int \operatorname{sen}x\left(e^{x}dx\right) \qquad \text{(A)}\\ &= e^{x}(\operatorname{sen}x) - \left[-e^{x}\cos x + \int e^{x}\cos x\,dx\right]\\ &= e^{x}\operatorname{sen}x + e^{x}\cos x - \int e^{x}\cos x\,dx\end{aligned}$$

El resultado de la sustitución queda:

$$\int e^{x}\cos x\,dx = e^{x}\operatorname{sen}x + e^{x}\cos x - \int e^{x}\cos x\,dx$$

Las dos integrales que se visualizan en esta ecuación, son la misma, es por ello que se puede realizar el despeje correspondiente, pasando la integral del lado derecho de la ecuación, al lado izquierdo.

$$\begin{aligned}\int e^{x}\cos x\,dx + \int e^{x}\cos x\,dx &= e^{x}\operatorname{sen}x + e^{x}\cos x\\ 2\int e^{x}\cos x\,dx &= e^{x}\operatorname{sen}x + e^{x}\cos x\\ 2\int e^{x}\cos x\,dx &= e^{x}(\operatorname{sen}x + \cos x)\end{aligned}$$

En el resultado anterior, se aplicó factorización por factor común. Por último se debe eliminar el coeficiente de la integral, pasándolo al otro lado de la ecuación. Si notaste en el proceso no se consideró la constante, para no crear conflicto en el mismo, es por ello que consideró colocarla hasta el final.

$$\int e^{x}\cos x\,dx = \frac{e^{x}(\operatorname{sen}x + \cos x)}{2} + \text{cte.}$$

Actividad: 3

Calcula la integral de las siguientes funciones utilizando la técnica de integración por partes.

1. $\int x e^{-6x} \, dx =$

2. $\int \sec^3 x \, dx =$

Actividad: 3 (continuación)

3. $\int x^2 e^{3x}\,dx =$

4. $\int x^2 \ln x\,dx =$

5. $\int \operatorname{sen}^2 t\,dt =$

Actividad: 3 (continuación)

6. $\int x \sec^2 x dx =$

7. $\int x\sqrt{4+x}dx =$

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 3</td><td colspan="3">Producto: Ejercicios.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Distingue el tipo de función que requiere elegir para aplicar el método de integración por partes.</td><td colspan="3">Emplea el método de integración por partes, para integrar varios tipos de funciones.</td><td colspan="2">Muestra interés al realizar la actividad y comparte sus resultados en la retroalimentación.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Cierre

Actividad: 4

Calcula la integral que se enlistan a continuación, verifica tu respuesta a través de diferenciación, o algún software de derivación.

1. $\int x\sqrt{x-2}\,dx$

2. $\int x\cos^2 2x dx$

3. $\int \cos(\ln x)dx.$

Actividad: 4 (continuación)

4. $\int 3x^2 \cos x^3 dx$

5. $\int x^2 \operatorname{sen} 3x dx$

6. $\int \frac{t^2}{(t^3-3)^{-10}} dt$

7. $\int x\sqrt{(x^2-4)^7}\, dx$

Actividad: 4 (continuación)

8. $\int \frac{1}{\sqrt{4-x}}dx$

9. $\int (x+e^{x})^{2}dx$

10. $\int x\sqrt{x-2}\,dx$

Evaluación						
Actividad: 4	Producto: Ejercicios.			Puntaje:		
Saberes						
Conceptual	Procedimental			Actitudinal		
Escoge el método de integración de acuerdo a las características de la función.	Utiliza la integración por cambio de variable o por partes, para resolver algunas integrales.			Aprecia la utilidad de los métodos de integración para resolver integrales que no pueden ser resueltas de forma directa.		
Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente		

Secuencia didáctica 2.
Método de integración de potencias de funciones trigonométrica y método por fracciones parciales.

Inicio

Actividad: 1

Desarrolla lo que se solicita.

I. Factoriza los siguientes polinomios:

1. $x^2 - 9 =$

2. $4x^2 + 3x =$

3. $x^2 - 8x + 15 =$

4. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 =$

5. $x^4 - 12x^2 - 64 =$

II. Divide los siguientes polinomios.

1. $\dfrac{x^3 + 2x^2 - x}{x^2 - 1} =$

Actividad: 1 (continuación)

2. $\dfrac{3x^2}{2x^2+1}=$

III. Realiza las operaciones que se indican.

1. $\dfrac{3}{x^2-1}+\dfrac{4}{x+1}=$

2. $\dfrac{5}{x^2+2x-15}-\dfrac{4}{x+3}=$

IV. Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 8x+5y=39 \\ 6x-5y=3 \end{cases}$$

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 1</td><td colspan="3">Producto: Ejercicios.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Identifica los diferentes métodos de factorización y solución de sistemas de ecuaciones, así como las operaciones básicas entre expresiones algebraicas.</td><td colspan="3">Aplica los conocimientos que adquirió en asignaturas previas, para resolver factorizaciones, sistemas de ecuaciones y operaciones básicas de fracciones algebraicas.</td><td colspan="2">Reconoce la importancia de los conocimientos previos, para el buen desarrollo de secuencias.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Desarrollo

Integración de potencias de funciones trigonométricas.

A continuación se verán reglas para integrar potencias de funciones trigonométricas, las cuales a su vez se utilizan para integrar funciones trigonométricas más complejas que se resuelven en niveles superiores.

Para ello se abordarán varios casos:

Potencias de senos y cosenos.

Para resolver este tipo de integrales, se consideran dos casos.

1er. Caso. Si la potencia es impar.
Se utiliza la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.
Resolver $\int \operatorname{sen}^3 x\, dx$

Considerando que la potencia es 3 (impar) y que la función a integrar es seno, se realiza el despeje de la identidad trigonométrica.

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$$

Posteriormente, se expresa la integral como potencia cuadrada de seno, para poder sustituir la identidad anterior.

$$\int \operatorname{sen}^3 x\, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)(\operatorname{sen} x)\, dx = \int (1-\cos^2 x)(\operatorname{sen} x)\, dx$$

Ahora se realizará un cambio de variable, donde:

$$u = \cos x$$
$$du = -\operatorname{sen} x\, dx$$

Se despeja dx, para poder llevar a cabo la sustitución.

$$\frac{du}{-\operatorname{sen} x} = dx$$

Quedando de la siguiente manera:

$$\int \operatorname{sen}^3 x\, dx = \int (1-\cos^2 x)(\operatorname{sen} x)\, dx = \int (1-u^2)\cancel{(\operatorname{sen} x)} \frac{du}{-\cancel{\operatorname{sen} x}} = -\int (1-u^2)\, du$$

Para integrar, se separa en dos integrales que se resuelven de forma directa.

$$\int \operatorname{sen}^3 x\, dx = -\int (1-u^2)\, du = -\int 1 du + \int u^2 du = -u + \frac{u^3}{3} + cte.$$

Por último se sustituye el valor de “u”.

$$\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = -u + \frac{u^3}{3} + cte. = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + cte.$$

Ejemplo 2.

Resolver $\int \cos^5 x\,dx$

Ahora se despeja el coseno cuadrado en la identidad.

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$$

Se expresa la integral como potencia cuadrada de coseno, para poder sustituir la identidad anterior.

$$\int \cos^5 x\,dx = \int \left(\cos^2 x\right)^2 (\cos x)dx = \int \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right)^2 (\cos x)dx$$

Ahora se realizará un cambio de variable, donde:

$$u = \operatorname{sen} x$$
$$du = \cos x\,dx$$

Quedando de la siguiente manera:

$$\int \cos^5 x\,dx = \int \left(\cos^2 x\right)^2 (\cos x)dx = \int \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right)^2 (\cos x)dx = \int \left(1 - u^2\right)^2 du$$

Para integrar se desarrolla el binomio al cuadrado y se resuelven las integrales de forma directa.

$$\int \cos^5 x\,dx = \int \left(1 - u^2\right)^2 du = \int \left(1 - 2u^2 + u^4\right)du = \int 1du + \int -2u^2\,du + \int u^4\,du = u - 2\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + cte.$$

Por último se sustituye el valor de “u”.

$$\int \cos^5 x\,dx = u - 2\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + cte. = \operatorname{sen} x - \frac{2\operatorname{sen}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + cte.$$

2do. Caso. Si la potencia es par.

Se utiliza cualquiera de las identidades trigonométricas.

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} \qquad \text{ó} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

Ejemplo.
Resolver $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$

Se expresa la función a integrar como potencias cuadradas de seno y posteriormente se sustituye en la integral original el despeje correspondiente, como se muestra a continuación.

$$\int \operatorname{sen}^4 x\,dx = \int \left(\operatorname{sen}^2 x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 dx$$

Se desarrolla el binomio al cuadrado como sigue:

$$\int \operatorname{sen}^4 x\,dx = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2}\right)^2 (1-\cos(2x))^2\,dx = \int \frac{1}{4}\left(1-2\cos(2x)+\cos^2(2x)\right)dx$$
$$= \frac{1}{4}\int 1dx - \frac{1}{4}\int 2\cos(2x)dx + \frac{1}{4}\int \cos^2(2x)dx$$

Las dos primeras integrales son directas porque se encuentra la diferencial completa, pero en la tercera integral será necesario sustituir la identidad:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 x\,dx &= \frac{1}{4}\int 1dx - \frac{1}{4}\int \cos(2x)2\,dx + \frac{1}{4}\int \cos^2(2x)dx \\
&= \frac{1}{4}\int 1dx - \frac{1}{4}\int \cos(2x)dx + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos(4x)}{2}dx \\
&= \frac{1}{4}\int 1dx - \frac{1}{4}\int \cos(2x)dx + \frac{1}{8}\int (1+\cos(4x))dx \\
&= \frac{1}{4}\int 1dx - \frac{1}{4}\int \cos(2x)dx + \frac{1}{8}\int 1dx + \frac{1}{8}\int \cos(4x)dx \\
&= \frac{1}{4}\int 1dx - \frac{1}{4}\int \cos(2x)dx + \frac{1}{8}\int 1dx + \frac{1}{32}\int \cos(4x)4dx
\end{aligned}$$

Resolviendo las integrales se obtiene:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 x\,dx &= \frac{1}{4}\int 1dx - \frac{1}{4}\int \cos(2x)dx + \frac{1}{8}\int 1dx + \frac{1}{32}\int \cos(4x)4dx \\
&= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) + \text{cte.}
\end{aligned}$$

Por último, simplificando términos semejantes se obtiene el resultado final.

$$\int \operatorname{sen}^4 x\,dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) + \text{cte.}$$

Productos de potencias de senos y cosenos.
Para resolver este tipo de integrales, se requiere distinguir entre la naturaleza de las potencias.

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$$

Para ello se emplean las identidades ya vistas anteriormente.

1er. Caso. Si las potencias son pares.
Si m y n son pares, se utilizan:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} \qquad \text{ó} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

Ejemplo.
Calcular $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx$

Se sustituye las identidades correspondientes.

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right) dx$$

Se realizan las operaciones correspondientes:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos(2x))(1+\cos(2x))dx$$

El producto obtenido se conoce como binomios conjugados, los cuales dan como resultado una diferencia de cuadrados, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx &= \frac{1}{4}\int (1-\cos(2x))(1+\cos(2x))dx \\ &= \frac{1}{4}\int \left(1-\cos^2(2x)\right)dx\end{aligned}$$

Se separan las integrales y como se obtiene una potencia cuadrada de coseno, se vuelve a sustituir la identidad correspondiente.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx &= \frac{1}{4}\int \left(1-\cos^2(2x)\right)dx \\ &= \frac{1}{4}\int 1dx - \frac{1}{4}\int \cos^2(2x)dx \\ &= \frac{1}{4}\int 1dx - \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos(4x)}{2}dx \\ &= \frac{1}{4}\int 1dx - \frac{1}{8}\int (1+\cos(4x))dx \\ &= \frac{1}{4}\int 1dx - \frac{1}{8}\int 1dx - \frac{1}{8}\int \cos(4x)dx \\ &= \frac{1}{4}\int 1dx - \frac{1}{8}\int 1dx - \frac{1}{32}\int \cos(4x)4\,dx\end{aligned}$$

Resolviendo las integrales se obtiene:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\,dx &= \frac{1}{4}\int 1dx - \frac{1}{8}\int 1dx - \frac{1}{32}\int \cos(4x)4\,dx\\ &= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) + \text{cte.}\end{aligned}$$

Por último, simplificando términos semejantes se obtiene el resultado final.

$$\int \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\,dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) + \text{cte.}$$

2do. Caso. Si alguna de las potencias es impar.
Si m ó n es impar, se utiliza la identidad.

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Ejemplo.
Calcular $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^3 x\,dx$

Se expresa la función coseno elevada al cubo como producto de potencias, como se muestra a continuación.

$$\int \operatorname{sen}^2 x\cos^3 x\,dx = \int \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\cos x\,dx$$

Se sustituye la identidad correspondiente y se realizan las operaciones.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x\cos^3 x\,dx &= \int \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\cos x\,dx\\ &= \int \operatorname{sen}^2 x\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)\cos x\,dx\\ &= \int \left(\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^4 x\right)\cos x\,dx\\ &= \int \operatorname{sen}^2 x\cos x\,dx - \int \operatorname{sen}^4 x\cos x\,dx\end{aligned}$$

Ahora se realiza un cambio de variable, donde:

$$u = \operatorname{sen} x$$
$$du = \cos x\,dx$$

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x\cos^3 x\,dx &= \int \operatorname{sen}^2 x\cos x\,dx - \int \operatorname{sen}^4 x\cos x\,dx\\ &= \int u^2du - \int u^4du\end{aligned}$$

Resolviendo las integrales se obtiene:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x\cos^3 x\,dx &= \int u^2du - \int u^4du\\ &= \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + \text{cte.}\\ &= \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + \text{cte.}\end{aligned}$$

Productos de potencias de tangentes y secantes.
Para resolver este tipo de integrales, se requiere distinguir entre la naturaleza de las potencias.

$$\int \tan^m x \sec^n x\,dx$$

1er. Caso. Si n es par.
Este caso depende de la potencia de la secante y para ello se utiliza:

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

Ejemplo.
Calcular $\int \sec^6 x \tan^8 x\,dx$

Se expresa la función secante elevada a la sexta como producto de potencias, como se muestra a continuación.

$$\int \sec^6 x \tan^8 x\,dx = \int \sec^2 x \left(\sec^2 x\right)^2 \tan^8 x\,dx$$

Se sustituye la identidad correspondiente y se realizan las operaciones.

$$\begin{aligned}
\int \sec^6 x \tan^8 x\,dx &= \int \sec^2 x \left(\sec^2 x\right)^2 \tan^8 x\,dx \\
&= \int \sec^2 x \left(1 + \tan^2 x\right)^2 \tan^8 x dx \\
&= \int \sec^2 x \left(1 + 2\tan^2 x + \tan^4 x\right) \tan^8 x dx \\
&= \int \sec^2 x \left(\tan^8 x + 2\tan^{10} x + \tan^{12} x\right) dx \\
&= \int \tan^8 x \sec^2 x\,dx + 2\int \tan^{10} x \sec^2 x\,dx + \int \tan^{12} x \sec^2 x\,dx
\end{aligned}$$

Ahora se realiza un cambio de variable, donde:

$$\begin{aligned}
u &= \tan x \\
du &= \sec^2 x\,dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \sec^6 x \tan^8 x\,dx &= \int \tan^8 x \sec^2 x\,dx + 2\int \tan^{10} x \sec^2 x\,dx + \int \tan^{12} x \sec^2 x\,dx \\
&= \int u^8 du + 2\int u^{10} du + \int u^{12} du
\end{aligned}$$

Resolviendo las integrales se obtiene:

$$\begin{aligned}
\int \sec^6 x \tan^8 x\,dx &= \int u^8 du + 2\int u^{10} du + \int u^{12} du \\
&= \frac{u^9}{9} + 2\frac{u^{11}}{11} + \frac{u^{13}}{13} + \text{cte.} \\
&= \frac{\tan^9 x}{9} + 2\frac{\tan^{11} x}{11} + \frac{\tan^{13} x}{13} + \text{cte.}
\end{aligned}$$

2do. Caso. Si m es impar.
Este caso depende de la potencia de la tangente y para ello se utiliza.

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

Ejemplo.
Calcular $\int \sec^5 x \tan^3 x\, dx$

En esta integral se pueden descomponer ambas funciones, de tal manera que se pueda obtener sec x tan x, dado que ésta es la derivada de sec x.

$$\int \sec x \sec^4 x \tan x \tan^2 x\, dx$$

Se sustituye la identidad correspondiente y se realizan las operaciones.

$$\begin{aligned}\int \sec x \sec^4 x \tan x \tan^2 x\, dx &= \int \sec x \sec^4 x \tan x\left(\sec^2 x - 1\right)dx\\ &= \int \sec x \tan x \sec^4 x\left(\sec^2 x - 1\right)dx\\ &= \int (\sec x \tan x \sec^4 x \sec^2 x - \sec x \tan x \sec^4 x)dx\\ &= \int \sec x \tan x \sec^6 x\, dx - \int \sec x \tan x \sec^4 x\, dx\end{aligned}$$

Ahora se realiza un cambio de variable, donde:

$$\begin{aligned} u &= \sec x\\ du &= \sec x \tan x\, dx\end{aligned}$$

$$\int \sec x \sec^4 x \tan x \tan^2 x\, dx = \int u^6 du - \int u^4 du$$

Resolviendo las integrales se obtiene:

$$\begin{aligned}\int \sec x \sec^4 x \tan x \tan^2 x\, dx &= \int u^6 du - \int u^4 du\\ &= \frac{u^7}{7} - \frac{u^5}{5} + \text{cte.}\\ &= \frac{\sec^7 x}{7} - \frac{\sec^5 x}{5} + \text{cte.}\end{aligned}$$

Si n es impar y m par, se utiliza algún otro método como por ejemplo el método de integración por partes.

Actividad: 2

Resuelve las siguientes integrales.

1. $\int \tan^5 5x\,dx$

2. $\int \sec^3 x \tan^3 x\,dx$

Actividad: 2 (continuación)

3. $\int \sec^2 3t\,dt$

4. $\int \frac{sen^5 q}{\cos^6 q} dq$

Actividad: 2 (continuación)

5. $\int \sec^5 x\,dx$

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 2</td><td colspan="3">Producto: Ejercicios.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Identifica la identidad y el cambio de variable a utilizar en la integración de varias potencias de funciones trigonométricas.</td><td colspan="3">Emplea los diferentes casos para integrar potencias de funciones trigonométricas.</td><td colspan="2">Expresa sus dudas y corrige sus errores.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Integración mediante fracciones parciales.

La Integración mediante fracciones parciales, se utiliza para integrar cierta clase de funciones racionales (cociente de polinomios).

En Matemáticas 4 aprendiste que la función racional se define como:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

Donde P(x), Q(x) son polinomios y $Q(x)\neq 0$.

El método que se elija para resolver las integrales de funciones racionales dependerá, en primera instancia, del grado de los polinomios del numerador y denominador.

Integración de funciones racionales impropias.
El algoritmo de la división para integrar funciones racionales se puede utilizar cuando *el polinomio del numerador es de mayor o igual grado que el polinomio del denominador*, a este tipo de funciones se le denomina *impropia*, dado que se puede descomponer en la suma de un polinomio y una fracción propia (cuyo denominador es de mayor grado que el numerador).

En forma general, el algoritmo es el siguiente:

$$\begin{array}{r|l} & q(x) \\ \hline Q(x) & P(x) \\ & \\ \hline & r(x) \end{array}$$

Expresándose como sigue:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{Q(x)}$$

De tal manera que la integral buscada se descompone en:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int q(x)dx+\int\frac{r(x)}{Q(x)}dx$$

A continuación se mostrarán ejemplos que fácilmente se pueden integrar aplicando el algoritmo de la división.

Ejemplo 1.
Calcular $\int\frac{x^2+x+3}{x-2}dx$

Esta integral difícilmente se podría resolver con alguno de los métodos que hasta ahora se han visto.

Si se realiza la división de los polinomios se tiene:

$$\begin{array}{r|l} & x\ \ +3 \\ \hline x-2 & x^2+x+3 \\ & \underline{-x^2+2x} \\ & \qquad 3x+3 \\ & \qquad \underline{-3x+6} \\ & \qquad\qquad 9 \end{array}$$

La función racional se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{x^2+x+3}{x-2}=(x+3)+\frac{9}{x-2}$$

De esta manera la función racional, se descompone en una suma de fracciones algebraicas sencillas, las cuales se les conoce como *fracciones parciales* y son más fáciles de integrar.

$$\int\frac{x^2+x+3}{x-2}dx=\int(x+3)dx+\int\frac{9}{x-2}dx \qquad \text{(A)}$$

Se integrarán las fracciones parciales por separado, para facilitar su explicación.

Procedimiento	Descripción
$\int(x+3)dx=\int x\,dx+\int 3dx=\frac{x^2}{2}+3x+cte.$	Primero se separa en la suma de dos integrales, las cuales se integran de forma directa, obteniéndose así el resultado.
$\int\frac{9}{x-2}dx=9\int\frac{1}{x-2}dx=9\int\frac{1}{u}du=9Ln\lvert u\rvert+cte.=9Ln\lvert x-2\rvert+cte.$ $u=x-2$ $du=dx$	Se saca al coeficiente 9, fuera de la integral, posteriormente se realiza un cambio de variable, se obtiene la integral de forma directa, obteniéndose así el resultado.

Ahora, ambos resultados se sustituyen en (A).

$$\int\frac{x^2+x+3}{x-2}dx=\int(x+3)dx+\int\frac{9}{x-2}dx \qquad \text{(A)}$$

$$=\frac{x^2}{2}+3x+9Ln\lvert x-2\rvert+cte.$$

Ejemplo 2.

Resolver $\int\frac{x^3+2x-8}{x-1}dx$

Se realiza el algoritmo de la división, dado que es una fracción algebraica impropia, debido a que el polinomio del numerador es de mayor grado que el del denominador. ésta resultaría de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+x+3 \\
\hline
x-1 & x^3+0x^2+2x-8 \\
 & -x^3+x^2 \\
 & \quad x^2+2x \\
 & \quad -x^2+x \\
 & \qquad 3x-8 \\
 & \qquad -3x+3 \\
 & \qquad\quad -5
\end{array}$$

El resultado se puede escribir como:

$$\frac{x^3+2x-8}{x-1}=x^2+x+3+\frac{-5}{x-1}$$

Expresando la integral, se tiene que ésta se descompuso en la suma de dos funciones, en una función cuadrática y una función racional más sencilla la cual está representada por una fracción algebraica propia.

$$\int \frac{x^3+2x-8}{x-1}dx = \int (x^2+x+3)dx + \int \frac{-5}{x-1}dx$$

A continuación se procede a integrar las funciones que están a la derecha de la ecuación.

$$\int \frac{x^3+2x-8}{x-1}dx = \int (x^2+x+3)dx + \int \frac{-5}{x-1}dx$$
$$= \int x^2dx + \int x\,dx + \int 3dx + \int \frac{-5}{x-1}dx$$

Para resolver la última integral, se realiza el cambio de variable:

$u = x-1$

$du = dx$

$$\int \frac{x^3+2x-8}{x-1}dx = \int x^2dx + \int x\,dx + \int 3dx + \int \frac{-5}{x-1}dx$$
$$= \int x^2dx + \int x\,dx + \int 3dx - 5\int \frac{1}{u}du$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x - 5\text{Ln}|u| + \text{cte.}$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x - 5\text{Ln}|x-1| + \text{cte.}$$

Actividad: 3

Resuelve las siguientes integrales.

1. $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$

Actividad: 3 (continuación)

2. $\int \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 - 1} dx$

3. $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 9x}{2x + 5} dx$

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 3</td><td colspan="3">Producto: Ejercicios.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Distingue el tipo de función que requiere elegir para aplicar el algoritmo de la división en la solución de la integral de una función racional.</td><td colspan="3">Emplea el algoritmo de la división para simplificar la integral de una función racional e integrar de forma directa.</td><td colspan="2">Muestra interés al realizar la actividad y comparte sus resultados en la retroalimentación.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Integración de funciones racionales propias.

Las funciones racionales propias, son aquellas cuyo numerador es un polinomio de grado menor que el polinomio del denominador, para resolver este tipo de integrales, se tienen que separar en varios casos.

1er. Caso. Q(x) tiene factores lineales distintos.

Esto es, al factorizarse Q(x), éste se descompone en factores de la forma ax+b, como se muestra a continuación con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.

Comprobar que $\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx = \int \frac{2}{x-1}dx - \int \frac{1}{x+2}dx$.

Si esto es cierto, la integral se puede resolver fácilmente con un pequeño cambio de variable. Nótese que las fracciones en las cuales se descompuso la función racional original son funciones racionales impropias con denominadores diferentes.

Ahora, para comprobar que es válida la proposición anterior, se desarrollará el lado derecho de la ecuación.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx &= \int \frac{2}{x-1}dx - \int \frac{1}{x+2}dx \\
&= \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)dx \\
&= \int \frac{2(x+2)-1(x-1)}{(x-1)(x+2)}dx \\
&= \int \frac{2x+4-x+1}{(x-1)(x+2)}dx \\
&= \int \frac{x+5}{(x-1)(x+2)}dx \\
&= \int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx
\end{aligned}$$

En Matemáticas 1, dentro del tema “fracciones algebraicas” conociste este procedimiento que consiste en sumar o restar fracciones. Ahora lo que se debe hacer es el proceso contrario: dada una función racional, obtener su descomposición en fracciones; para hacerlo también se recurrirá a la solución de sistemas de ecuaciones y por ello es de suma importancia el reforzamiento de estos temas.

A continuación se ejemplificará la forma de obtener la descomposición en fracciones, para ello se iniciará con la integral del ejemplo 1.

Ejemplo 2.

Calcular $\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx$.

Primero se factoriza el denominador.

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx = \int \frac{x+5}{(x+2)(x-1)}dx$$

Al factorizarse el denominador se puede obtener su descomposición en fracciones. Dejando a un lado las integrales para centrarse en la descomposición, se considera lo siguiente:

$$\frac{x+5}{x^2+x-2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$$

Posteriormente efectuando la suma de fracciones algebraicas, se obtiene:

$$\frac{x+5}{x^2+x-2}=\frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

Ahora se desarrolla el numerador del lado derecho de la ecuación.

$$\frac{x+5}{x^2+x-2}=\frac{Ax-A+Bx+2B}{(x+2)(x-1)}$$

Se reducen términos semejantes.

$$\frac{x+5}{x^2+x-2}=\frac{(A+B)x+(2B-A)}{(x+2)(x-1)}$$

Debido a que se establece una igualdad y además el denominador es el mismo para ambos lados de la ecuación, también existe una igualdad en los numeradores, es por ello que se puede establecer que:

$$x=(A+B)x \qquad y \qquad 5=(2B-A)$$
$$1=A+B$$

Formándose así, un sistema de 2 x 2 (dos ecuaciones con dos incógnitas), el cual se puede resolver por suma o resta, éste es uno de los métodos más utilizados para resolver este tipo de sistemas.

$$\begin{cases}1=A+B\\5=(2B-A)\end{cases}$$

Resolviendo por suma o resta se obtiene:

$$\begin{aligned}A+\ B&=1\\-A+2B&=5\\ \hline 3B&=6\\B&=\frac{6}{3}\\B&=2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A+\ B&=1\\A+2&=1\\A&=1-2\\A&=-1\end{aligned}$$

Sustituyendo estos resultados se tiene:

$$\frac{x+5}{x^2+x-2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$$

$$\frac{x+5}{x^2+x-2}=\frac{-1}{x+2}+\frac{2}{x-1}$$

Ahora se expresarán las integrales, para darles solución.

$$\int\frac{x+5}{x^2+x-2}dx=\int\frac{-1}{x+2}dx+\int\frac{2}{x-1}dx$$

Para resolver las integrales del lado derecho, se recurre al cambio de variable, utilizando uno distinto para cada una de ellas, así que se resolverán por separado.

$$\int \frac{-1}{x+2}dx = -\int \frac{1}{x+2}dx = -\int \frac{1}{u}du = -\text{Ln}\left|u\right| + \text{cte.} = -\text{Ln}\left|x+2\right| + \text{cte.}$$

$u = x+2$
$du = dx$

$$\int \frac{2}{x-1}dx = 2\int \frac{1}{x-1}dx = 2\int \frac{1}{u}du = 2\text{Ln}\left|u\right| + \text{cte.} = 2\text{Ln}\left|x-1\right| + \text{cte.}$$

$u = x-1$
$du = dx$

Sustituyendo ambos resultados se obtiene:

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx = -\text{Ln}\left|x+2\right| + \text{Ln}\left|x-1\right| + \text{cte.}$$

2do. Caso. Q(x) tiene factores lineales repetidos.

Para visualizar el caso se ejemplifican varios polinomios que tienen factores iguales.

1. $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$
2. $x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2$
3. $x^3 - 4x^2 + 4x = x(x-2)^2$
4. $x^6 - 2x^4 + x^2 = x^2(x-1)^2(x+1)^2$

Utiliza los métodos de factorización para verificar los resultados anteriores, entre ellos se recomienda:

1. Factor común.
2. Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$.
3. Diferencia de cuadrados.
4. División sintética.

Al momento de descomponer en fracciones parciales, el factor que se repite tendrá que aparecer tantas veces como multiplicidad tenga este factor, para visualizarlo se retomarán varios ejemplos.

Ejemplo.
Resolver $\int \frac{3x+5}{x^3 - x^2 - x + 1}dx$.

El polinomio $x^3 - x^2 - x + 1$ se puede factorizar por medio de la división sintética, como se muestra a continuación.

Considerando todas las posibles raíces: $+1$, -1.
Éstas se obtienen de dividir los factores del término independiente entre el coeficiente del coeficiente principal y como ambos tienen valor de 1, las posibles raíces son ± 1.

Si x−1 es factor, entonces la raíz es 1 y el residuo tiene que ser cero.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -1 & -1 & 1 & \underline{1} \\ & 1 & 0 & -1 & \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & \end{array}$$

Por lo tanto el polinomio se expresa:

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x^2-1)$$

Se obtuvo como resultado un factor lineal y una diferencia de cuadrados que se requiere factorizar, quedando de la siguiente forma:

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x-1)(x+1) = (x-1)^2(x+1)$$

De acuerdo al resultado, se obtuvo un factor repetido, el cual se considera de la siguiente forma.

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Como el factor que se repite es con potencia 2, se considera el factor lineal y el factor elevado al cuadrado.

Realizando las operaciones indicadas en el lado derecho de la ecuación se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} &= \frac{A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1)}{(x+1)(x-1)^2} \\ &= \frac{A(x^2-2x+1) + B(x^2-1) + C(x+1)}{(x+1)(x-1)^2} \\ &= \frac{Ax^2 - 2Ax + 1A + Bx^2 - 1B + Cx + 1C}{(x+1)(x-1)^2} \\ &= \frac{Ax^2 + Bx^2 - 2Ax + Cx + 1A - 1B + 1C}{(x+1)(x-1)^2} \end{aligned}$$

Simplificando términos semejantes se obtiene:

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} = \frac{(A+B)x^2 + (C-2A)x + (A-B+C)}{(x+1)(x-1)^2}$$

Ahora se igualan los coeficientes, formándose el sistema de ecuaciones a resolver.

$$A + B = 0$$
$$C - 2A = 3$$
$$A - B + C = 5$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A + C = 3 \\ A - B + C = 5 \end{cases}$$

De lo que resulta:

$$A = \frac{1}{2}$$
$$B = -\frac{1}{2}$$
$$C = 4$$

Retomando la integral original y las fracciones parciales que se obtuvieron, queda:

$$\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$$

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx &= \int \frac{A}{x+1}dx + \int \frac{B}{x-1}dx + \int \frac{C}{(x-1)^2}dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}}{x+1}dx + \int \frac{-\frac{1}{2}}{x-1}dx + \int \frac{4}{(x-1)^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx + 4\int \frac{1}{(x-1)^2}dx\end{aligned}$$

Resolviendo cada una de las integrales anteriores con sus respectivos cambios de variable, éstas quedan:

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\text{Ln}|u| + \text{cte.} = \frac{1}{2}\text{Ln}|x+1| + \text{cte.}$$

$u = x+1$
$du = dx$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = -\frac{1}{2}\text{Ln}|u| + \text{cte.} = -\frac{1}{2}\text{Ln}|x-1| + \text{cte.}$$

$u = x-1$
$du = dx$

$$4\int \frac{1}{(x-1)^2}dx = 4\int \frac{1}{u^2}du = 4\int u^{-2}du = 4\frac{u^{-1}}{-1} + \text{cte.} = -4\frac{1}{u} + \text{cte.} = -\frac{4}{x-1} + \text{cte.}$$

$u = x-1$
$du = dx$

Sustituyendo los resultados de las integrales de fracciones parciales, se obtiene:

$$\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\text{Ln}|x+1| - \frac{1}{2}\text{Ln}|x-1| - \frac{4}{x-1} + \text{cte.}$$

El resultado anterior se puede simplificar utilizando las propiedades de los logaritmos, pregúntale a tu profesor.

En el caso de que *Q(x)* no tenga factorización, se requiere un formulario más amplio de integrales de fracciones, los cuales abordarás en niveles superiores.

Actividad: 4

Resuelve las siguientes integrales.

1. $\int \frac{1}{x^2 - 4} dx$

2. $\int \frac{x - 6}{x^2 + x - 6} dx$

Actividad: 4 (continuación)

3. $\int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}dx$

Evaluación						
Actividad: 4	Producto: Ejercicios.			Puntaje:		
Saberes						
Conceptual	Procedimental			Actitudinal		
Observa las características de la función racional para integrarla mediante fracciones parciales.	Utiliza sus conocimientos de Álgebra para integrar mediante fracciones parciales.			Aprecia la utilidad de los métodos algebraicos para factorizar, solucionar sistemas de ecuaciones y realizar operaciones con fracciones algebraicas.		
Autoevaluación	C	MC	NC	Calificación otorgada por el docente		

Sitios Web recomendados:

Ingresa a las siguientes ligas, para que refuerces tu aprendizaje. También se te ofrece la liga para que compruebes las integrales que realizaste.

http://www.mat.uson.mx/eduardo/calculo2/metodos.pdf
http://www.vadenumeros.es/segundo/metodos-de-integracion.htm
http://www.hiru.com/matematicas/metodos-de-integracion
http://integrals.wolfram.com/index.jsp

■ Cierre

Actividad: 5

Resuelve la integral, identificando el método más adecuado.

1. $\int \tan^5 x \sec^3 x \, dx$

2. $\int \frac{3x^2 - x + 1}{x^3 - x^2} dx$

Actividad: 5 (continuación)

3. $\int \text{sen}^6 x \cos^4 x\,dx$

4. $\int \frac{x^2+1}{x^2-x}dx$

Actividad: 5 (continuación)

5. $\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$

6. $\int \cos^5 x \, dx$

Actividad: 5 (continuación)

7. $\int \frac{x^3 + x^2 - 12x + 1}{x^2 + x - 12} dx$

8. $\int \operatorname{sen}^2 3x\, dx$

<table>
<tr><th colspan="6">Evaluación</th></tr>
<tr><td>Actividad: 5</td><td colspan="3">Producto: Ejercicios.</td><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><th colspan="6">Saberes</th></tr>
<tr><th>Conceptual</th><th colspan="3">Procedimental</th><th colspan="2">Actitudinal</th></tr>
<tr><td>Escoge el método de integración de acuerdo a las características de la función.</td><td colspan="3">Utiliza la integración por fracciones parciales y potencia de funciones para resolver algunas integrales.</td><td colspan="2">Aprecia la utilidad de los métodos de integración para resolver integrales que no pueden ser resueltas de forma directa.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoevaluación</td><td>C</td><td>MC</td><td>NC</td><td rowspan="2">Calificación otorgada por el docente</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Bibliografía

- ASTEY, Luis. *Cálculo Diferencial*. Ed. Limusa. México. 2009.
- BURRI Gail F. *Geometría integración, aplicaciones y conexiones*. Mc Graw Hill. México. 887 pp. 2003.
- CONTRERAS, Leticia et. al. *Cálculo diferencial e integral, Físico-matemáticas y químico-biológicas*. Santillana Bachillerato. México. 2010.
- CUESTA, Vilvaldo. et. al. *Cálculo Integral con enfoque en competencias*. Book Mart, México, 2008.
- GRANVILLE, William. *Cálculo Diferencial e Integral*. Ed. Limusa. México. 2009.
- HAEUSSLER, Ernest, *Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la vida*, Ed. Prentice-Hall. 1997.
- HOWARD, Taylor. *Cálculo Diferencial e Integral*. Ed. Limusa. México. 2009.
- IBAÑEZ Patricia y García Gerardo. *Matemáticas VI, Cálculo Integral*. Cengage Learning. México. 2008.
- LARSON Ron - HOSTETLER Robert P. *Cálculo diferencial e integral*. McGraw-Hill Interamericana. 2002.
- MORA, Emiliano y Río, María. *Cálculo diferencial e integral, Ciencias sociales y económico administrativas*. Santillana Bachillerato. México. 2010.
- MORA, Emiliano y Rios, María. *Cálculo diferencial e integral*. Santillana. México. 2008.
- RAMÍREZ, Margarito. *Cálculo Integral*. Colegio de Bachilleres del Estado de San Luis Potosi. México. 2009.
- STEWART, James. *Cálculo diferencial e integral.* Cengage Learning. México. 2009.